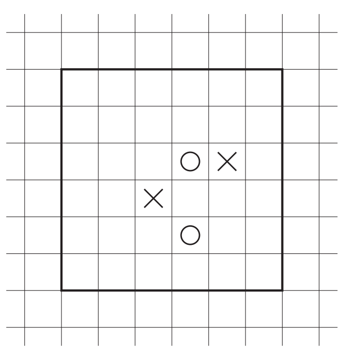
POLYGON
XVIII.köt., 1.sz., 2009. okt.

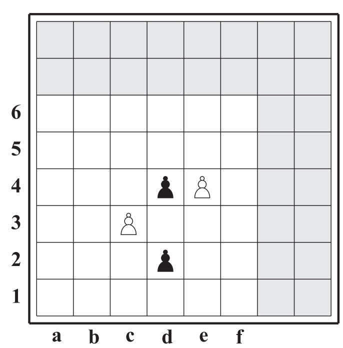
RavaszNégyzet – egy kombinatorikai játék

Csákány Béla, Makay Géza, Nyőgér István

A játék leírása; jelölések. A RavaszNégyzet védett nevű táblás játékot id. Incze Attila szegedi faműves 1999-ben kezdte gyártani és árusítani. Esetleges előzményeiről nem tudunk; Richard K. Guy, a diszkrét matematikai játékok egyik legnagyobb szakértője nemrég úgy nyilatkozott, hogy eddig nem ismerte ezt a játékot [2]. A gyártó fia, ifj. Incze Attila a játékra elegáns programot írt, amellyel 2004-ben díjat nyert a *<19 Szabadfogású Számítógép* ifjúsági programozási versenyen (lásd: http://verseny.c3.hu/2004/nyertesek/). E cikk további részében a játék nevét csupa kisbetűvel írjuk. Táblája hat sorban és oszlopban elhelyezkedő 36 mezőből áll, szabálya pedig a következő: Két játékos felváltva helyez el egy-egy saját színű bábot a tábla még el nem foglalt mezőinek bármelyikén. A lerakott bábok többé nem mozdulnak. Az nyer, aki négyzetet csinál; részletesebben, akinek a bábjai elfoglalnak négy olyan mezőt, amelyek középpontjai valamely négyzet négy csúcspontját alkotják. Nem követeljük meg, hogy ennek a négyzetnek az oldalai párhuzamosak legyenek a tábla oldalaival.

Szemmel láthatóan, a ravasznégyzetet játszhatjuk számtanfüzet lapján is az amőba (más néven ötödölő) játékhoz hasonlóan (különböző színű bábok lerakása helyett kereszteket és köröcskéket írva a rácsnégyzetekbe), vagy sakktábla alkalmasan elrekesztett hatszor hatos méretű részén, világos és sötét sakkfigurákkal, ahogyan ábráink mutatják.





A következőkben mindig a játék ez utóbbi megvalósítására gondolunk. Így a mezőket és a játszmákat a sakkban szokásos módon jelölhetjük, ill. írhatjuk le. Megállapodunk, hogy a játékot a világos bábokkal játszó fél kezdi. Az ábrákon ugyanazt a ravasznégyzet-feladványt látjuk: világos indul és harmadik lépésében négyzetet csinál. A megoldás:

1. *b*5+ – *d*6
2. *d*1++

és a következő lépésben világos vagy az $a2$, vagy az $f2$ mezőn négyzetet csinál. Itt $+$ a fenyegetés jele: ha egy – a táblán a fenti értelemben lehetséges – négyzet két csúcsában egyszínű, pl. világos báb áll, és világos elfoglalja ennek a négyzetnek egy harmadik csúcsát is, miközben a negyedik csúcs még üres, akkor világos lépése *fenyegetés*. Ha sötét válaszlépésében négyzetet tud csinálni, akkor a fenyegetés haszontalan volt, máskülönben pedig világos fenyegetését sötét egyetlen módon védheti, ti. azáltal, hogy elfoglalja a negyedik csúcsot. Ha ezzel sötét egy másik négyzetnek már összesen három csúcsát foglalja el és annak a négyzetnek a negyedik csúcsa még üres, akkor sötét lépése *ellenfenyegetés*. Végül, ha valamelyik játékos, pl. világos a lépésével elfoglalja két különböző olyan négyzetnek egy közös csúcsát, amelyeknek két-két csúcsán már világos báb állt, negyedik csúcsuk pedig különböző és üres, akkor világos lépése *kettős fenyegetés*; jele $\#$. Ha sötét válaszként nem tud négyzetet csinálni, akkor a kettős fenyegetést egyetlen báb lerakásával nem tudja védeni, és világos a következő lépésével négyzetet csinál. A bevezetett fogalmak további szemléltetésére íme egy teljes játszma (javasoljuk, hogy az olvasó az ábrán látható módon, négyzetrácsos papíron vagy sakktáblán játssza le):

$$\begin{array}{lll}
1.\ c2 & - & e3 \\
2.\ b3 & - & d1 \\
3.\ d3+ & - & c4+ \\
4.\ b2+ & - & c3 \\
5.\ [a2, b1]\# & &
\end{array}$$

(Itt $[a2, b1]$-et írtunk „$a2$ vagy $b1$” helyett; ilyen rövidítést a következőkben gyakran fogunk használni.) Most sötét az $a3$-on és $b1$-en, vagy $a2$-n és $c1$-en egyidejűleg fenyegető négyzetet nem tudja védeni.

A ravasznégyzet-tétel. Tapasztalataink szerint a ravasznégyzet kisiskolástól kezdve matematikában is jártas felnőttig minden érdeklődő számára gondolkodtató, érdekes játék. Gyors játszmákban rendszerint megmutatkozik a kezdőlépés előnye, de ez nem tűnik általános érvényűnek, hiszen például ifj. Incze Attila professzionális kiállítású programját le lehet győzni sötét bábokkal is. Annál inkább meglepő, hogy bebizonyítható a következő tétel:

A ravasznégyzet játékban világos legfeljebb öt lépésben négyzetet csinálhat, bárhogyan is játszik sötét.

Az előző mondatot joggal neveztük tételnek, hiszen matematikai állítás. Ez szembetűnőbb, ha így fogalmazzuk meg:

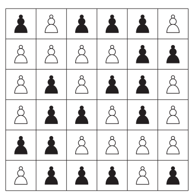
A ravasznégyzet nevű kombinatorikai játékban világosnak létezik olyan stratégiája, amely sötét bármely stratégiája ellen legfeljebb öt lépésben biztosítja a nyerést. (Lásd [3], 43-50. o.; a fogalmakra vonatkozóan l. [1], 16, 19, 21. o.)

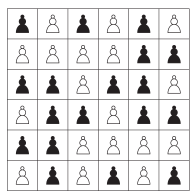
Egy könnyedebb átfogalmazás:

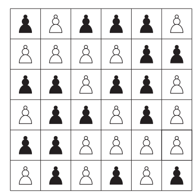
Megoldható az a ravasznégyzet-feladvány, amelynek ábrája az üres tábla, követelménye pedig „világos indul és öt lépésben négyzetet csinál”.

A bizonyítás előtt gondoljuk meg, milyen — a tételnél gyengébb — állítások következnek ismert általánosabb tényekből. Neumann János kombinatorikai játékokra vonatkozó alaptétele szerint a ravasznégyzetben is három lehetőség van: vagy világosnak, vagy sötétnek van nyerő stratégiája, vagy pedig mindkét játékosnak van biztonságos stratégiája ([1], 28. o.). A ravasznégyzet malomszerű játék, ezért alkalmazható rá a stratégialopás gondolatmenete ([1], 106. o.), amely mutatja, hogy a ravasznégyzetben sötétnek nem létezhet nyerő stratégiája.

Ha a ravasznégyzet éles játék lenne — azaz nem létezne döntetlen eredményű ravasznégyzet-játszma —, akkor az eddigiekből már következnék, hogy benne világosnak van nyerő stratégiája. Ám nem ez a helyzet: számítógépes vizsgálattal kiderült, hogy a tábla telerakható 18 világos és 18 sötét bábbal anélkül, hogy akár világos, akár sötét négyzet kialakulna. A tábla három ilyen kitöltését mutatja a következő ábra.


a)


b)


c)

A vizsgálat (amellyel a szegedi Bolyai Intézet szervere bő 100 percet töltött) azt is megmutatta, hogy nem létezik ezektől *lényegesen különböző* döntetlen végállás, abban az értelemben, hogy minden további döntetlen végállás e három állás valamelyikéből elforgatás, tükrözés és színváltás útján keletkezik. Annak a belátásához, hogy a három állás lényegesen különböző, vegyük észre, hogy a) négy széle közül egyiken sincs pontosan három világos báb, b) mindegyik szélén pontosan három világos báb van, míg c)-nek van pontosan három világos bábot tartalmazó széle és háromtól különböző számú világos bábot tartalmazó széle is. Ezeket a tulajdonságokat azonban az elforgatás, tükrözés és színváltás változatlanul hagyja.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő fogalomra: a tábla két különböző mezője *n-edfokú mezőpárt* alkot, ha a táblán pontosan n olyan négyzet van, amely mindkét tekintett mezőt csúcsként tartalmazza. Látjuk, hogy mezőpár fokszáma 0, 1, 2 és 3 lehet; harmadfokú pár például $\{c1, c3\}$, másodfokú $\{a2, b1\}$, elsőfokú $\{a1, f6\}$, nulla fokszámú $\{a1, f5\}$. Játszma közben egy n-edfokú mezőpár *szabad*, ha azoknak a négyzeteknek, amelyeknek csúcsa a tekintett két mező, egyetlen további csúcsa sincs még bábbal elfoglalva.

A tétel bizonyítása. Azt mutatjuk meg, hogy ha világos első lépésével a négy középső mező $(c3, c4, d3, d4)$ valamelyikét foglalja el, akkor világosnak

(1) van olyan második lépése, amellyel szabad harmadfokú mezőpárt foglal el,

(2) van olyan harmadik lépése, amely fenyegetés, és sötétnek az ezt védő lépése nem ellenfenyegetés,

(3) van olyan negyedik lépése, amely kettős fenyegetés,

bármelyik mezőket is foglalja el sötét első, második és harmadik lépésével.

Legyen világos első lépése $c3$. A következő gondolatmenet szimmetria-okokból alkalmazható a $c4$, $d3$, $d4$ kezdőlépésekre is. Részletesen leírjuk világosnak az (1), (2), (3) pontokban leírt tulajdonságú lépéssorozatát sötét minden (válasz)lépéssorozatára, a játszmák leírásának az első fejezetben bemutatott módját használva. Rövidség kedvéért xn fogja jelölni a tábla n-edik sorát, tehát az an, bn, cn, dn, en, fn mezők halmazát; hasonlóan, ny jelöli a tábla n jelű oszlopát, vagyis az $\{n1, n2, n3, n4, n5, n6\}$ halmazt; továbbá mm jelentése: „minden más lépés”, $mmnmf$ jelentése: „minden más, nem mellékátló fölötti lépés”. (A tábla sorairól, oszlopairól, fő- és mellékátlójáról a determinánsoknál szokásos értelemben beszélünk.) Így

$$\begin{array}{lll} 1.\ c3 & - & \mathbf{d4} \\ 2.\ \mathbf{c1} & - & [x5, x6, ay, d1, ey, f1, f3] \\ 3.\ b2+ & - & d2 \\ 4.\ c2\# & & \end{array}$$

azt mutatja be, hogy sötét $d4$ első lépésére világos a $\{c3, c1\}$ harmadfokú szabad mezőpárt foglalja el, és ha sötét erre az 5. vagy 6. sorba, az a vagy e jelű oszlopba, vagy pedig $d1$-re, $f1$-re vagy $f3$-ra helyezi bábját, akkor világos $b2$ lépése fenyegetés, amelyet sötét csak $d2$-vel védhet, erre pedig a $c2$ kettős fenyegetés következik. A további lehetőségek 1. $c3$ – $\mathbf{d4}$, 2. $\mathbf{c1}$ után:

$$\begin{array}{lll} 2. & - & [b1, b2, b3.b4, c2, c4, d2, d3, f2, f4] \\ 3.\ a3+ & - & a1 \\ 4.\ c5\# & & \end{array}$$

Itt sötét második lépésére már használhattuk volna az mm jelölést. Ha sötét 1. $c3$ után a mellékátló valamely további mezőjére $(a1, b2, e5, f6)$ lép, világos így folytatja:

$$\begin{array}{lllcllll} 1. & - & \mathbf{a1} & & & & \\ 2.\ \mathbf{d4} & - & [b2, d2] & \quad & 2. & - & mmnmf \\ 3.\ b4+ & - & c5 & & 3.\ b4+ & - & c5 \\ 4.\ c4\# & & & & 4.\ b2\# & & \end{array}$$

A szimmetria miatt elegendő volt sötét nem mellékátló fölötti lépéseit vizsgálnunk. Másrészt a főátlóra vonatkozó szimmetria miatt sötét $f6$ első válaszlépésével sem kell külön foglalkoznunk. Ugyanilyen a helyzet sötét $b2$ és $e5$ első válaszlépései esetén, ezért közülük itt csak $b2$-re adjuk meg világos nyerő lépéssorozatait:

1. $c3$ – **b2**		
2. **d4** – $[d2, e3, e5, f4]$	2. – $e3$	2. – $mmnmf$
3. $c4+$ – $d3$	3. $c5+$ – $b4$	3. $c5+$ – $b4$
4. $c5$++	4. $c4$++	4. $e5$++

Hátravannak sötétnek azok a válaszlépései 1. $c3$-ra, amelyek nem a mellékátlóra esnek. Csak a mellékátló alatti lépéseket vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy sötét **d2**, **d3** vagy **e3** lépésére **b4**, minden más lépésére **d4** lesz világos (ötödik lépésében) nyerő folytatása:

1. $c3$ – [**d2**]		
2. **b4** – $[a3, a5, b2]$	2. – $[c5, d4]$	2. – mm
3. $c5$ – $d4$	3. $a3+$ – $b2$	3. $a3+$ – $b2$
4. $c4$++	4. $b3$++	4. $c5$++

1. $c3$ – [**d3**]		
2. **b4** – $[a3, a5, b2]$	2. – $[c5, d4]$	2. – mm
3. $c5$ – $d4$	3. $b2+$ – $a3$	3. $a3+$ – $b2$
4. $c4$++	4. $b3$++	4. $c5$++

1. $c3$ – [**e3**]			
2. **b4** – $[a3, b2, c1, c2]$	2. – $[b3, c4]$	2. – $[c5]$	2. – mm
3. $c5+$ – $d4$	3. $b2+$ – $a3$	3. $a3+$ – $b2$	3. $b2+$ – $a3$
4. $c4$++	4. $d4$++	4. $b3$++	4. $b3$++

Sötét további 12 lehetséges első válaszlépése közül csak a **b1**, **c1**, **c2**, **d1**, **e1**, **e2**, **f1** lépésekkel kell foglalkoznunk, ezúttal a főátlóra vonatkozó szimmetria miatt:

1. $c3$ – [**b1**, **c1**, **d1**, **e1**, **f1**]			
2. **d4** – $[b2, b3, b4, c5, f4]$	2. – $[c4, d3]$	2. – $[a3, e3]$	2. – mm
3. $d2+$ – $e3$	3. $d2+$ – $e3$	3. $c5+$ – $b4$	3. $b4+$ – $c5$
4. $d3$++	4. $b4$++	4. $c4$++	4. $c4$++

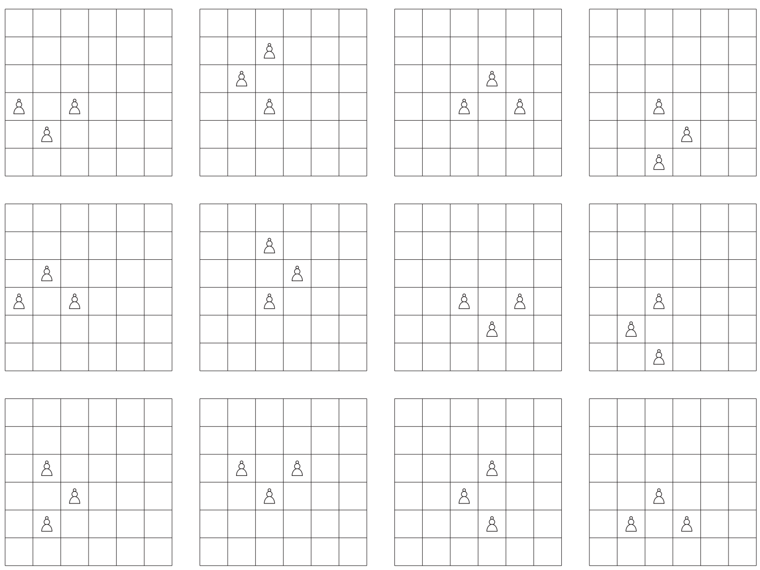
1. $c3$ – [**c2**, **e2**]			
2. **d4** – $[b3, b4, c5]$	2. – $[c4, d3]$	2. – $[f2, f5]$	2. – mm
3. $e3+$ – $d2$	3. $d2+$ – $e3$	3. $c5+$ – $b4$	3. $b4+$ – $c5$
4. $d3$++	4. $b4$++	4. $c4$++	4. $c4$++

Ezzel a bizonyítás kész.

Nem meglepő, hogy a tétel nem élesíthető: ötnél kevesebb lépésben világos csak sötét „támogatásával” nyerhet. Ez abból következik, hogy négyzetet az ellenfél korrekt játéka mellett csak kettős fenyegetés után lehet csinálni.

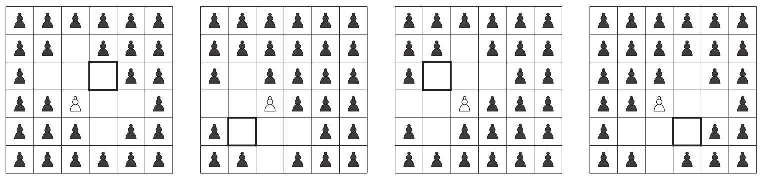
Számítógép — még egyszer. Az előző részben leírt stratégia annyiban egyszerű, hogy világos második lépése csak a $d4$, a $c1$ és a $b4$ mezők valamelyike lehet, ha sötét első lépése nem mellékátló feletti. A mellékátlóra való tükrözés miatt $b4$-ből megkapjuk még $d2$-t is, mint világos lehetséges második lépését. Ám $c1$ tükörképe, az $a3$ mező nem szükséges a nyerő stratégiához: azt kizárólag a sötét $d4$ lépésére adott világos válasznál használjuk, és akkor a tábla mellékátlóra való szimmetriája miatt mind a $c1$, mind az $a3$ mező – sőt $b2$ is – megfelelő lépés. Így világosnak mindössze négy lehetséges második lépése van a fenti bizonyításban, mindazonáltal világos ott megadott stratégiájának memorizálása fáradságos.

Számítógép segítségével azonban találunk olyan, ugyancsak öt lépésben nyerő stratégiát, amely ugyanazon az elven alapul, és könnyebben megtanulható. Ebben világosnak szintén négyféle második lépése lehetséges (hogy melyik szükséges, azt nem nehéz megjegyezni), viszont harmadik lépésében csupán négy lehetőség közül kell kiválasztania a megfelelőt. Ehhez először gondoljuk meg – számítógép nélkül sem nehéz –, hogy első három bábját világos mindig (azaz sötét bármely első és második lépése esetén) lerakhatja az alábbi ábrán látható valamelyik módon:



Nevezzük minimális ferde derékszögű háromszögnek (röviden *mfd-háromszögnek* az $(a1, b2, c1)$ háromszöggel egybevágó háromszögeket. Látjuk, hogy ábránk a $c3$ mezőt tartalmazó összes mfd-háromszöget és csak ezeket tartalmazza.

A számítógépes elemzés megadta, hogy sötétnek a kezdőlépés utáni válaszlépéseire hogyan válaszoljon világos ahhoz, hogy harmadik lépése után bábjai a most látott tizenkét helyzet valamelyikét foglalhassák el, mégpedig úgy, hogy negyedik lépése már kettős fenyegetés lehessen (és védje sötét esetleges ellenfenyegetését is). Ezt a következő négy részes ábra mutatja. Vastag kerettel jelezzük a gép stratégiájának második lépését sötét (ugyanott látható) első lépéseinek bármelyike után:



Világos második lépését ábra helyett egyetlen könnyen észben tartható mondatban is megadhatjuk: világosnak a $d4$, $d2$, $b4$ és $b2$ (vagyis $c3$-mal csúcsszomszédos) mezők közül azt kell kiválasztania, amelyik a $c3$ mezővel együtt szabad harmadfokú mezőpárt alkot. A szabad harmadfokúság ellenőrzése egyszerű: a két mező alkothatja a leendő négyzet átlóját (egy ilyen négyzet van) vagy egy oldalát (két ilyen négyzet van). Az ábráról könnyen leolvasható, hogy a négy mező közül legalább az egyik mindig megfelelő lesz, és a számítógép megmutatta, hogy világos bármelyik ilyen mezőt választhatja. Harmadik lépésében pedig világosnak az addig elfoglalt két mezővel együtt mfd-háromszöget alkotó négy mező közül kell elfoglalnia a megfelelőt. Más szóval, egy olyan három lépéses ravasznégyzet-feladványt kell megoldania, amely könnyű, mert a „kulcslépésre” legfeljebb négy lehetőség van.

A számítógépes elemzés azt is megmutatta, hogy nem lehetséges három olyan mezőt mondani, mint világos lehetséges második lépését, amelyek valamelyikével világos minden esetben 5 lépésen belül megnyerné a játszmát. Az itt bemutatott, számítógéppel nyert stratégia helyességét „kézi erővel” is ellenőrizhetjük; ez hosszadalmas munka.

A gyorsan nyerő stratégia létezése nem teszi érdektelenné a játékot. Amikor diákjainkkal, kis rokonainkkal ravasznégyzetet játszunk (persze, lehetőleg sötéttel :-), geometriai érzékük, a négyzetekről alkotott intuitív képük, kombinatív készségük fejlődik; első, később sorozatos nyerésüket örömmel konstatálhatjuk. A 20. század nagy gyermekpszichológusa, Jean Piaget megfigyelte, hogy a gyermek ötéves korától kezdve egyre biztosabban ismeri fel a négyszögek különbözőségét ([4], 111-122. oldal). Eszerint ilyen korú gyermekkel már lehet ravasznégyzetet játszani, és ezt személyes tapasztalatunk is alátámasztja. Az ebben a cikkben leírt stratégiát ismerők is találhatnak új kihívásokat a ravasznégyzetben. Például megállapodhatnak abban, hogy első két lépésükben nem raknak bábot a középső mezőkre; vagy abban, hogy első két lépésében egyik játékos sem alakíthat ki harmadfokú párt. Végül, de nem utolsósorban, érdekes lehet a betli-ravasznégyzet, amelyben az *veszít*, aki négyzetet csinál.

Az érdeklődő olvasó a játékról és a jelen cikk előzményeiről további információkat szerezhet a [3] dolgozatból.

Irodalom

[1] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, 2. kiadás. Polygon, 2005.

[2] Fodor Ferenc szíves közlése, 2010. június 16.

[3] Nyőgér István, *A RavaszNégyzet nevű diszkrét matematikai játék elméletben és gyakorlatban.* Szakdolgozat, SZTE Bolyai Intézet, 2010.

[4] Jean Piaget, *Válogatott tanulmányok.* Gondolat Kiadó, 1969.