A fél évszázada született írás elé

Amikor a médiából megtudtuk, hogy *Vekerdi László* anyagi valóságában nincs többé közöttünk, nem egy híradásban nevezték Őt *az utolsó magyar polihisztornak*. Ez az *epiteton ornans* gyermekkoromban Brassai Sámuelt illette meg, aki a XIX. században a nyelvészettől kezdve a botanikán és teológián át a matematikáig sok tudományról írt és tanított hosszú élete során. Az utókor tisztelettel emlékezik rá, de nem hallgatja el talán egyedüli nagy tévedését sem: Brassai nem értette meg, mi több, gáncsolta Bolyai felfedezését, a nemeuklideszi geometriát. Ehhez hasonló hibát Vekerdi László bizonyosan nem követhetett volna el.

Nem csupán műveinek olvasása, rádió-előadásainak hallgatása során épült fel bennem ez a bizonyosság. Egyetlen lényeges személyes találkozásunkra a hatvanas évek második felében került sor. Fiatal docensként akkor fontosnak számító feladatot kaptam a szegedi egyetem Bolyai Intézetében: úgynevezett szakmai-ideológiai konferenciát kellett szerveznem. Így nevezték azokat az oktatói értekezleteket, amelyeken az adott szakterület és a marxista ideológia valamely találkozási pontjáról szóló előadást kötetlen beszélgetés, jó esetben vita követte. Természetesen Kalmár Lászlót szerettem volna előadónak felkérni – akkortájt még aspiránsvezetést is vállalt filozófiából –, de hiába: félszáz bizottság tagjaként joggal mondhatta Arany Toldijával: „Szakmány módra rám van mérve minden óra.” De ha kalácsot nem is, tanácsot kaptam tőle: „Van a Kutatóban egy könyvtáros, annak jó gondolatai vannak a matematika történetéről, és jól is beszél róluk. Őt kérd fel!”

Így kerültem a köszönőviszonynál érdemibb kapcsolatba Vekerdi Lászlóval. Készségesen vállalkozott a feladatra, és sajátos, lelkes, szuggesztív stílusában érdekes előadást tartott a szabad matematikai gondolat újkor elei kirobbanásáról. A „dialektikus materializmus” szókapcsolat ugyan nem hangzott el, de az előadó dialektikus gondolkodására és materialista szemléletére tekintettel ezt senki sem kifogásolta. Néhány évvel később jelent meg a bukaresti Kriterion kiadónál Vekerdi könyve, „A matematikai absztrakció történetéből” – annak az előmunkálataiba pillanthattunk be az előadás révén. A könyv Bolyai János gondolatait is beilleszti az absztrakt gondolkodás fejlődésének folyamatába.

Most, amikor a Természet Világa főszerkesztője elküldte nekem Vekerdi Lászlónak a magyar matematika (akkori) jelenéről ugyanabban az időszakban, *1964-ben* írt, e pillanatig kiadatlan dolgozatát, megint Kalmárra gondoltam. Egy nem régi beszélgetésből kiderül,[1] hogy a dolgozat Veress Jenő kővágóörsi tanár kérésére született, aki a jelenkor nagy magyar matematikusai felől érdeklődött, tanítványai ismeretszomját kielégítendő. Előképe ennek Kalmár László híres integrállevele, amelyben negyven gépírásos oldalon világítja meg Szabó Miklós makói orvosnak az integrál fogalmát.[2] Az említett beszélgetésben elhangzik, hogy a dolgozat eljutott a New Hungarian Quarterly (NHQ), a korszak reprezentatív angol nyelvű hazai folyóirata szerkesztőihez, akik közölni akarták, le is fordíttatták angolra a szerzővel, de a publikálásra végül nem került sor. Hogy miért, azt Vekerdi László így magyarázza: „…azt hittem, értek annyit a matematikához, hogy szabadon válogathassak nagy matematikusaink között. Később tudtam meg, ennek létezik egy majdhogynem hivatalos rangsora. Azt pedig ugyanúgy be kell tartani, mint az angol királynő fogadásán a protokollt. Nem csókolhatsz előbb kezet a londoni polgármester feleségének, mint a királynőnek. Nahát, én pedig nem aszerint csókoltam kezet matematikusainknak, hogy ki hol állt a hivatalos rangsorban.” Tegyük ehhez még, amit Veress tanár úrnak írt kísérőlevelében: „…a matematika nálunk annyira eleven tudomány, hogy erősen művelői elevenébe vág, a matematikusok egymásról való véleményét ezért óhatatlanul személyes ellen- és rokonszenvek bonyolult szövevénye módosítja.”[1]

Egyre kevesebben emlékszünk ma már arra, hogy ezek az ellen- és rokonszenvek a hatvanas években táborokat szervező erővé váltak. A táborok reprezentánsaitól forró drótok vezettek a pártközpont munkatársaihoz, akik számára lehetetlen küldetés volt megoldani a szellem túlfinomult idegrendszerű arisztokratáinak[3] zsigeri konfliktusait, arra viszont volt hatalmuk, hogy a sajtó útján elszenvedhető vélt sérelmektől megóvják őket. Így gondolkozhattak: „Az NHQ a néhány ablak egyike, amelyeken át a nyugati olvasó kis országunkba bepillanthat. Ha az NHQ-ban közölt cikk két sorban emlékezik meg X tudósról, de oldalakat szentel Y-nak, akkor ebből a művelt laikus csak két dologra következtethet: X vagy kevéssé jelentős alkotó, vagy kegyvesztett a magyar tudománypolitika irányítói előtt. Ennek nem tehetjük ki X-et.” Ezért kellett kéziratban maradnia az olvasók elé most kerülő írásnak.

Közel fél évszázad messzeségéből visszanézve megállapíthatjuk, hogy Vekerdi László – aki Veress Jenőhöz írt levelében kívülállónak, foglalkozása szerint könyvtárosnak, vágyai szerint történésznek mondta magát – ebben a munkájában könyvtárosi alapossággal igyekezett leltározni a kisebb mestereket is, a nagyok kiválasztásában meg igazi történésznek bizonyult: akiket piedesztálra emelt, azoknak mai szemmel nézve is ott van a helyük. Értékelése szubjektív – mondhatná valaki –, barátját, a fiatalon elhunyt Szele Tibort a legnagyobbakkal egy sorban méltatja. Hogy ezt teljes joggal teszi, egy személyes élménnyel és Szele első, magyar nyelvű, 1943-ban megjelent cikkével támasztom alá. Szele halála után három évvel lettem A. G. Kuros, a kiemelkedő orosz algebrista aspiránsa (mai nyelven doktorandusza). Kérdésére, hogy milyen témával szeretnék nála foglalkozni, szakirodalmi olvasottságom alapján öntudatosan válaszoltam, hogy Abel-csoportokkal. „Azért nem érdemes Magyarországról idejönni – válaszolt megütközve –, hiszen ott van Szele iskolája!” A kombinatorikai valószínűség-számítási módszerről szóló, nemrég már harmadszor is kiadott alapvető monográfiában[4] pedig ezt olvashatjuk: „…Szele a valószínűségi módszert már 1943-ban alkalmazta.” A könyv irodalomjegyzéke az említett (a Mathematical Reviews számára Erdős Pál által referált) cikket tartalmazza.

Ezen a ponton meg is állok. A szerző nem szorul az én igazolásomra. Értékeléseit az idő igazolta. Azt pedig nem sejthette a hatvanas években – ha nem is volt egészen kívülálló –, hogy 2000 táján a majdnem hivatalos és félig teljes magyar matematikatörténet[5] teljes joggal Lax Pétert és Takács Lajost emeli ki (igaz, implicite) a huszadik század magyar matematikusai közül. Olvassuk ezt a tartalmas és bátor (hiszen saját korszakáról szóló) tudománytörténeti *opus minor*-t úgy, ahogyan Ő készítette: *sine ira et studio.*

CSÁKÁNY BÉLA

---

1 Staar Gyula: *Múló szerelem volt a matematika? – Beszélgetés Vekerdi Lászlóval.* Forrás, 2009. április.

2 Nyomtatásban: K. L.: *Integrállevél – Matematikai írások*, szerk. Varga Antal. Gondolat, 1986.

3 Pollák György kollégám találó kifejezése.

4 Első kiadása: Alon, N., Spencer, J., *The probabilistic method. With an appendix by Paul Erdős.* John Wiley & Sons, 1992.

5 *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century,* Vol. I., J. Horváth, Editor. Springer–Bolyai Society, 2006. A kötetben nem szerepel a diszkrét matematika: algebra, kombinatorika, logika, halmazelmélet.

VEKERDI LÁSZLÓ

A magyar matematika jelenéből

ELSŐ RÉSZ

Fejér Lipót és Riesz Figyes

Az irodalomtörténet-írás régóta kedveli a „kettős csillagokat"; mint Goethe és Schiller, Petrarca és Dante, Puskin és Lermontov, Ibsen és Björnson, Petőfi és Arany példája mutatja, szeretik két (vagy három) névvel jellemezni a nemzeti keretek közül kinőtt poézis világirodalmivá válásának pillanatát. Ez a jellemzés sohasem teljes és mindig igazságtalan, s elsősorban nem az elmaradt nevek miatt. A jellemzésre használt írók munkájára esik más fény, a jelen múltba vetített fénye, és „igazi" énjüket már csak szorgalmas (s nagyjából érdektelen) lábjegyzetekkel megtűzdelt szaktörténeti kutatások tudják megközelíteni. A pillanat jellemzésére használt énjük kevesebb és egyben több lesz, mint történelem, legendává válik.

A magyar matematika történetének Fejér és Riesz a legendás ikercsillaga. Előttük a korai történelem homálya, néhány váratlan és magunk számára is érthetetlenül megjelenő prófétával, mint a Bolyaiak, és néhány Keresztelő Jánosa a magyar matematikának, mint Kőnig Gyula,[6] Kürschák József. Utánuk a történelem világos, évkönyvszerű feljegyzései. A két világ között van – action gratuit-ként – meglepően és világosan, a kezdet és a beteljesedés egységében, a legenda.

Mindkét névhez egy-egy tétel fűződik, egy-egy tétel, amely a XX. század talán 10 leggyakrabban idézett és használt tétele közé tartozik. A két tétel elég lenne világhírük biztosításához, a magyar matematika azonban józserivel abból keletkezett, amit ennek a két tételnek a segítésével ezen túl alkottak.

Fejér Lipót (1880–1959) igen fiatalon, még egyetemi hallgató korában (1900) észrevette, hogy ha egy *speciális* végtelen sor, az ún. Fourier-féle sor vizsgálatában az egyes tagok összeadásából keletkező részletösszegekről a részletösszegek *aritmetikai közepére* térünk át, akkor az eredeti végtelen sor olyan esetben is megközelíthetővé válik, amikor maguknak a részletösszegeknek a segítségével nem sokat tudunk mondani a sorra vonatkozóan. Azaz ha

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

az eredetileg adott végtelen sor, akkor az

$$s_0 = u_0$$
$$s_1 = u_0 + u_1$$
$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

részletösszegek $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ sorozata alapján nem minden esetben határozhatók meg a végtelen sor tulajdonságai, például az a fontos tulajdonság, hogy egy adott számköz valamely x helyén az $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ végtelen sor előállítja-e az $f(x)$ függvényt, vagy sem. Ha azonban az $s_0, s_1, s_2, \ldots$ sorozatról áttérünk az

$$s_0, \frac{s_0 + s_1}{2}, \ldots, \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

számtani középértékek sorozatára, akkor összetartó sorozathoz jutunk, amely az x folytonossági helyen $f(x)$-et szolgáltatja.

Ennek az egyszerű tételnek a segítségével maga Fejér és mások igen sok nehéz kérdést oldottak meg a Fourier-féle sorok s általában a hatványsorok elméletében, úgyhogy – amint G. H. Hardy megjegyezte – Fejér tétele „halomnyi modern kutatás kiindulópontja". A tétel, éppen egyszerűsége miatt, hirtelen átvilágított egy igen bonyolult, nehezen áttekinthető területet, ahol Fejér felfedezése előtt már minden további haladás reménytelennek látszott. Nem hiába kezdte Fejér 1902-ben magyarul megjelent doktori értekezését a következő szavakkal: „E dolgozat az analízis oly témájával foglalkozik, melynek elméletét a matematikusok már vagy 15 év előtt kimerítettnek, lezártnak tekintették és melyről azóta nem is írtak valami lényegesen újat." Fejér eljárása egy minden esetben meghatározott, *definit* műveletet (számtani közép képzése) helyettesített egy meghatározatlan, *indefinit* művelet (részletösszegek képzése) helyébe, s mint egy 1933-ban Amerikában tartott előadásában mondotta, „e kétféle típusú lineáris operáció közötti markáns eltérés … kétségtelenül fokozta azt az érdeklődést, amelyet a matematikusok már régóta tápláltak ez iránt a különbség iránt".[7]

Fejér gondolatvilágában a Fourier-féle sorok egyre inkább egyszerűen áttekinthető, konkrét minta szerepét töltik be, a segítségükkel talált összefüggések és műveletek más, általánosabb függvénysorokra utalnak, s a Fourier-sorok egyszerű trigonometrikus függvényein megismert lineáris operációk a XX. századi matematika egyik legfonto-

Születésnapi érmek

6 L. Szénássy Barna kitűnő, alapos monográfiáját: *Kőnig Gyula, 1849–1913,* Budapest, 1965.

7 Fejér, L.: *On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation, and of mechanical quadratures.* Bulletin of the American Mathematical Society, 521–534, 1933.

Kőnig Gyula

Kürschák József

Neumann János

Szőkefalvi-Nagy Béla

Haar Alfréd

sabb fejezetének, a lineáris operációk általános elméletének első fontos példái lettek.

Egészen más irányból közeledett ehhez a fontos területhez *Riesz Frigyes* (1880–1956). Fejér gondolatvilágát mindig a konkrét összefüggések szeretete uralta, konkrét példákból haladt általánosítások felé: a konkrét matematikai konstrukció volt egyik legerősebb oldala, talán éppen ezért hatott életműve a magyar matematika fejlődésében annyi sok területen inspirálóként.

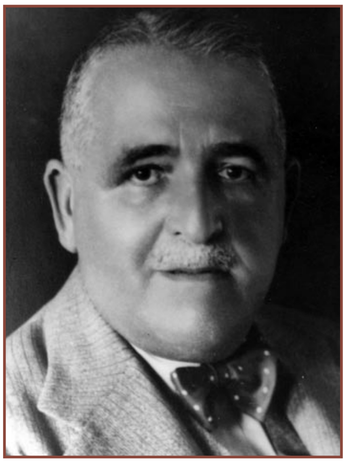
Fejér Lipót

Riesz gondolkozása kezdettől fogva zárt, formakedvelő, absztrakt volt. Viszonylag későn, 27 éves korában lépett a világ matematikájának színterére az ún. Riesz–Fischer-féle tétellel. A Fejér-tétel egy még meg sem született matematikai diszciplína első nagy eredménye volt, olyan, mint a mag, amiből később nő ki a fa. Riesz tétele olyan, mint a kagylóban a gyöngy: az első kristályosan tiszta eredménye egy képlékeny, konkrétan nem körvonalazott, akkor még el sem nevezett diszciplínának.

Riesz tételét nem lehet olyan egyszerűen elmondani, mint a Fejér-tételt. Durván szólva úgy lehetne kifejezni, hogy míg a Fejér-tétel arra tanít meg, hogyan kell egy *speciális* végtelen függvénysor tagjaiból

Matematikai konferencia Szegeden (álló sor: Riesz Frigyes, Kerékjártó Béla, Haar Alfréd, Kőnig Gyula, Ortvay Rudolf; ülő sor: Kürschák József, George D. Birkhoff, Kellog O. D., Fejér Lipót; szőnyegen ülő sor: Radó Tibor, Lipka István, Kalmár László, Szász Pál)

valamely $f(x)$ függvényt előállító összetartó sorozatot konstruálni, a Riesz–Fischer-féle tétel azt mondja meg, *melyik* az a *speciális* függvényosztály, amelyikbe tartozó $f(x)$ függvényeket egy tetszőleges speciális (ún. ortonormált) függvényrendszer szerint sorba fejtve a sorfejtés $s_n(x)$ részletösszegei az $f(x)$ függvényhez konvergálnak. Ez a függvényosztály a Lebesgue-féle értelemben négyzetesen integrálható függvények osztálya, azaz az olyan függvényeké, amely függvények négyzete a Lebesgue által bevezetett (akkoriban) új integrálfogalom értelmében integrálható. A régi, Riemann-féle értelemben integrálható függvényekre a Riesz–Fischer-féle tétel nem érvényes. Ez azért volt nagyon fontos, mert akkoriban a Lebesgue-féle integrálfogalmat sokan még afféle felesleges elméleti preciőzködésnek tartották, a Lebesgue-féle integrál csak a Riesz–Fischer-tétel következtében lett elsőrendű fontosságú, ennek a tételnek a folyományaképpen vonult be a matematikai hétköznapok világába. A Riesz–Fischer-tétel értelmében ugyanis a Lebesgue szerint négyzetesen integrálható függvények osztálya, az ún. L_2 függvényosztály matematikai műveletek tekintetében azonosnak, „izomorfnak” bizonyult a Hilbert által pár évvel azelőtt bevezetett (megszámlálhatóan) végtelen sok dimenziós euklideszi térrel. Ahogyan a Hilbert-féle vektortérben végtelen sok komponens véges négyzetösszegét tekintjük egy vektor „hosszúságnégyzetének”, ugyanúgy az L_2 függvényosztály egy $f(x)$ függvényének a „hosszúságnégyzetét” a függvény négyzetének Lebesgue-féle integrálja definiálja. Tehát a Riesz–Fischer-tételnek hasonló szerepe van az L_2 függvényosztályban, mint egy közönséges n dimenziós euklideszi térben (pl. $n = 2$ esetében a síkban) a Pitagorasz-tételnek: megadja, hogyan kell összetevőiből összetenni vagy összetevőkre bontani a tér egy objektumát. Ennek megfelelően az L_2 függvényosztály úgy tekinthető, mint valami absztrakt tér, *függvénytér,* s ennek a függvénytérnek meg a Hilbert-féle végtelen sok dimenziós vektortérnek a közös tulajdonságait absztrahálva alkották meg az absztrakt Hilbert-féle teret. Ezt az absztrakt Hilbert-teret használta Fejér és Riesz tanítványa, *Neumann János* a kvantummechanika megalapozására.



Riesz Frigyes

Maga Riesz az L_2 függvénytér mintájára más absztrakt tereket is bevezetett és vizsgált, s az egyes függvényterek példája alapján már az 1910-es években körvonalazta az általános lineáris metrikus terek elméletének az alapjait. Ezt az elméletet azután nemsokára lengyel és amerikai matematikusok dolgozták ki, részben Riesz nyomán, részben tőle függetlenül. Riesz is felépítette a húszas és harmincas évek alatt az általános lineáris operációk terének egy absztrakt, elegáns elméletét. Ezt az elméletet az 1928-as bolognai nemzetközi matematikai kongresszuson ismertette, később azonban sikerült még jobban általánosítania. „Nem a

Kerékjártó Béla

Kalmár László

Péter Rózsa

Rédei László

Szele Tibor

számközt vagy ponthalmazt helyettesítem – írja – absztrakt halmazzal, nem a folytonos függvényeket általánosabb függvényosztállyal, hanem maguknak a függvényeknek a szerepét veszik át absztrakt elemek és a függvényosztályét ezeknek az elemeknek az összessége, melyet néhány, nagyon kevés, az elemek összeadását illető föltevéssel jellemzünk."[8]

Riesz absztrakció iránti érzéke a függvényterek ezen globális, egészükben való vizsgálata mellett egy másik, mintegy belülről, a tér egyes elemeiből kiinduló vizsgálati irány szempontjából is alapvető eredményeket hozott. A ponthalmazok elmélete által diktált új szellemnek megfelelően Maurice Fréchet 1906-ban bevezette az absztrakt elemekből álló halmazon értelmezett függvények vizsgálatába a határérték fogalmát. Riesz két évvel később, az 1908-as római nemzetközi matematikai kongresszuson megmutatta, hogy a határérték fogalma (a megszámlálhatóság fogalmához való kötöttsége miatt) nem alkalmas az absztrakt halmazok elméletének a megalapozására, s ehelyett az általa definiált *sűrűsödési pont* fogalmát vezette be, amivel a modern matematika egyik legfontosabb ágának, a halmazelméleti topológiának az elindítója lett.[9]

Riesz absztrakt, világosságra és egyszerűsítésre törekvő gondolkozása a matematika más területein is, például a komplex változós függvények elméletében (szubharmonikus függvények), a potenciálelméletben, az integrálegyenletek elméletében, az ergodelméletben fontos, sokszor egész nagy későbbi kutatási irányok kiindulását képező felfedezésekhez vezetett. Tanítványával, *Szőkefalvi-Nagy Bélával* írt könyve, a *Lecons d'analyse fonctionnelle* (Budapest, 1952) az utóbbi két évtized legsikeresebb matematikai könyvei közé tartozik, pár éven belül négy kiadása fogyott el, több nyelvre lefordították. A Riesz által elindított irány mai napig a magyar matematika legfontosabb fejezetei közé tartozik, Szőkefalvi-Nagy Béla munkásságát világszerte ismerik és becsülik.[10]

Riesz Frigyes (Szeged, 1934)

Szeged

Az első, az egész világ matematikája szempontjából fontos magyarországi matematikai centrum Szegeden alakult ki. A trianoni békeszerződés után Szegedre költöztetett kolozsvári egyetemmel került Riesz Frigyes és *Haar Alfréd* (1885–1933) Szegedre. Leginkább nekik s még néhány professzortársuknak, elsősorban Szent-Györgyi Albertnek köszönhető, hogy Szeged a matematikai-természettudományos kutatás magyarországi centrumává nőhetett. Riesz és Haar indították el 1922-ben az *Acta Scientiarum Mathematicarum*ot, a híres „Szegedi Aktá"-t, az első tisztán matematikai kutatásoknak szentelt, világnyelveken megjelenő magyarországi folyóiratot. A Szegedi Akta lett minden azóta keletkezett, igényes magyar matematikai folyóirat mintaképe. Már az első évfolyamokban sok világhírű külföldi matematikus neve látható a magyaroké mellett: M. Brelot, O. Perron, J. Dieudonné, E. R. Lorch, H. Bohr, S. Saks, N. Wiener – hogy csak a legismertebbeket említsük. Mégis, az Acta igazi „aranyfedezete" a szegedi matematikusok munkássága volt.

A szegedi matematikai élet irányát az első évtizedben Riesz mellett főleg Haar Alfréd szabta meg, korai haláláig (1933). Haar Göttingenben tanult, és Riesz kifejezetten francia szemléletéhez ő ennek a nagy német matematikai centrumnak a szellemét csatolta. Göttingen akkoriban leginkább David Hilbert és Richard Courant hatását jelentette, sokoldalúságot, axiomatizálást, elmélet és gyakorlat egységét. Haar Alfréd a matematika nagyon sok, egymástól távoli területén dolgozott, a későbbi fejlődés szempontjából legfontosabb eredményét a folytonos csoportok elméletében érte el. A folytonos csoportok elméletének fejlődését egy igen komoly korlátozás gátolta: a csoportban szereplő függvényeknek kétszer differenciálhatóknak kellett lenniük. Hilbertnek a párizsi matematikai kongresszuson felvetett híres „megoldatlan problémái" között ötödikként éppen az a kérdés szerepelt, hogy el lehet-e ejteni ezt a korlátozást. Számos nagy matematikus próbálta megoldani a kérdést, míg végre Haarnak 1932-ben sikerült a folytonos csoportok olyan elméletét felépíteni, amelyben el lehetett ejteni ezt a kikötést. Az általa bevezetett új mértékfogalom, az ún. „Haar-mérték" segítségével azután át lehetett vinni az integrál fogalmát a csoportok elméletébe, s így lehetővé vált a folytonos csoportok szerkezetének egy új oldalról való vizsgálata.

Igen fontos szerepe volt a csoport fogalmának *Kerékjártó Béla* (1898–1946) gondolkozásában is. Ő képviselte Szegeden a geometriát. Legfontosabb dolgozatai a topológia klasszikus, Poincaré és Brouwer által elindított formájával foglalkoznak. Kerékjártó a nagy rendszeralkotók közé tartozott: több kötetre tervezett művéből, ami végigment volna a geometria egészén, csak az első két kötet készült el, az euklideszi és a projektív geometria. Az euklideszi geometria felépítésében a keret Hilbert híres Grundlagen-axiomatikája, de az axiomatika kereteit áttöri Kerékjártó eleve geometriai intuíciója, s a kongruens transzformációk csoportjának szimmetriatulajdonságaiból egy olyan abszolút geometriát vezet le, amelyből – a párhuzamosság definíciója szerint – egyaránt megkapható az euklideszi és a nemeuklideszi geometria. Hasonlókép-

8 Riesz Frigyes: *A lineáris operációk általános elméletének néhány alapvető fogalomalkotásáról.* Matematikai és Természettudományi Értesítő, 56, 1–46, 1937.

9 Manheim, J. H.: *The Genesis of Point Set Topology*. Oxford etc. 1964, 119–120.

10 L. pl. Császár Ákos: *Szőkefalvi-Nagy Béla tudományos munkásságának ismertetése*. Matematikai Lapok, 15, 1–22, 1964.

Pólya György

Szegő Tibor

Fekete Mihály

Egerváry Jenő

pen a projektív megfelelkezések csoportstruktúráiból vezeti le a második kötetben a projektív geometriát. Mind a két kötetben azt a tervet realizálja, amit Felix Klein vázolt híres „erlangeni program”-jában, de senki Kerékjártóig ilyen részletesen meg nem valósított.

Absztrakció, matematikai struktúrák és alapelvek iránti érzék volt jellemző a szegedi matematikai légkörre, s ez jó keret volt *Kalmár László* sokoldalú tehetsége számára. Kalmár igazi matematikai hazája mégis nem Szeged volt, hanem Göttingen, s talán nem is csak szigorúan matematikai értelemben. Kalmár honosította meg ugyanis nálunk azt a matematikai-pedagógiai szellemet, ami a legjobb német egyetemek szemináriumaiban, főleg Göttingenben, egészen 1933-ig otthonos volt, a szervezett és mégis közvetlen, egyéni nevelésnek azt az ötvözetét, ami a matematikapedagógusi életformából egy kisváros egyetemének szűk falai között is színes, érdekes, szakmai kalandot faragott. Kalmár közelében a matematika mindig emberivé sűrűsödött, az absztrakció (gyakran egymás után többféle) emberi tartalommal telítődött, a szó szoros értelmében érdekessé vált. Tanítványa és munkájának sok tekintetben folytatója, *Péter Rózsa* kitűnően jellemzi: „Mint vérbeli pedagógus, tanulni is, alkotni is tanítva tudott legjobban. Volt rá eset, hogy félig kész munkáját adta elő fiatal matematikusoknak és előadás közben találta meg a hiányzó lépéseket. A matematikai logikával szegedi tanársegéd korában ismerkedett meg, úgy, hogy 40–50 oldalas leveleket írt róla…”

Ettől kezdve Kalmár sokfelé irányuló matematikai érdeklődésének a matematikai logika volt a tengelye. Mint egykor nagy elődjét, Kőnig Gyulát, Kalmárt is Hilbert gondolkozása vonta bűvkörébe, Hilbert bizonyításelmélete vezette kutatásaiban. Kalmár nagy hatásának tulajdonítható, hogy „a matematika alapjának tudománya terén ma működő magyar matematikusok – eltekintve néhány halmazelméleti kutatástól – elsősorban a *matematikai logika* kérdéseivel foglalkoznak. … A matematikai logika egyik fontos teendője, hogy a *következmény* fogalmának matematikai szempontból szabatos, a matematika legkülönbözőbb területein mindenféle következtetésre egyaránt alkalmazható meghatározását adja. Kézenfekvő azt is megkívánni, hogy adott állításokról (tételekről, feltevésekről vagy sejtésekről) a meghatározás alapján mindig el lehessen dönteni véges számú lépésben, vajon egy további adott állítás következményük-e. A matematikai logika az ilyen meghatározás kérdését az ún. *eldöntésproblémára* vezeti vissza. Az eldöntésprobléma annak a feltételeit keresi, hogy egy adott *logikai formula* bármely halmazon *azonosan igaz* legyen; ezzel ekvivalens másik alakjában annak a feltételeit keresi, hogy egy adott logikai formulához legyen olyan halmaz, amelyen (a formula) kielégíthető.”[11] Kalmár éppen azáltal, hogy az eldöntésproblémát mindkét oldalról, a formula meg a formula kielégíthetőségi tartományának a szempontjából egyaránt vizsgálta, a matematikai rendszerek olyan szabad, nyitott, fejlődésben lévő felfogásához jutott, amely – mint Péter Rózsa írja – „erősen megingatta azt az elgondolást, hogy a matematika eljárásait zárt keretek közé lehet kényszeríteni.”[12]

A matematikai logika abban a szabad formában, ahogyan Kalmár felfogta, igen sok helyen érintkezik a matematikai struktúrák vizsgálatának a tudományával, az absztrakt algebrával. Láttuk, hogy már Riesz vizsgálataiban milyen fontos szerepe volt az absztrakt struktúráknak, Kerékjártó pedig absztrakt algebrai fogalomra, a csoport fogalmára alapozta a geometriát. Minden feltétel adva volt, hogy Szegeden kialakuljon az első magyar absztrakt algebrai iskola. Ennek a folyamatnak az elindítója *Rédei László* volt. Rédei mint *Bauer Mihály* tanítványa kezdett algebrával foglalkozni, Bauer Mihály pedig az algebrai számelmélet legkiválóbb képviselői közé számított a húszas-harmincas években. Az akkoriban „modern”-nek nevezett absztrakt algebrát azonban hatalmas lépés választotta el az algebrai számelmélettől, s ezt a nagy lépést az absztrakció irányába Rédei Szeged hatására tette meg. Rédei és Kalmár tanítványa volt *Szele Tibor*, aki ugyanolyan szilárdan megalapozta Magyarországon az absztrakt algebrai kutatásokat, mint Fejér a sorelméletet, Riesz a funkcionálanalízist.

11 Kalmár László: *A matematika alapjaival kapcsolatos újabb eredmények.* A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei, 2, 89–103, 1952.

12 Péter Rózsa: *Kalmár László matematikai munkássága*. Matematikai Lapok, 6, 138–150, 1955.

A Fejér-iskola

A két világháború közötti nehéz időszakban Szeged volt az egyetlen magyarországi egyetemi város, ahol a matematika talán még kicsi támogatást is élvezett. Az ország urai nem bánták, hogy Szegeden kialakult valamiféle kis „magyar Göttingen”, amire külföldiek előtt hivatkozni lehetett. Pesten más volt a helyzet. Itt az egyetemen a jogi és a teológiai fakultások uralkodtak, a matematikát, a fizikát a Horthy-korszak hatalmasságai nem támogatták. Pedig az egyik matematikai tanszéken 1911 óta Fejér volt a professzor, és körülötte felnőtt az első összefüggő, folyamatos matematikai iskola. „Budapesti működését – írja *Turán Pál* – nagy ambícióval kezdette el és hamarosan egész gárdája nő fel mellette a kiváló tanítványoknak. Elég, ha Fekete Mihály, Egerváry Jenő, Pál Gyula, Csillag Pál, Szász Ottó, Lukács Ferenc és Sidon Simon neveit említem meg, a teljességre és rendszerezésre való minden igény nélkül.” Fejér iskolateremtő erejének oka értekezésének ideáin, gondolatébresztő voltán és ötvözött stílusán felül egyéniségének közvetlensége lehetett. Tanítványai vele nemcsak a szemináriumán beszélhettek, egyetemi szobájának ajtaját nem vigyázta altiszt, a beszélgetés időpontját nem rögzítette titkár. A szemináriumi megbeszélés, főleg fiatalabb éveiben, a kávéházban folytatódott; sok jelentős értekezés árulkodna, ha tudna, arról, hogy tartalmuk első formáit a budai Erzsébet kávéház, vagy a pesti Mignon márványasztalain, számolócéduláin vagy szalvettáin nyerte, Fejérrel való beszélgetés alatt vagy után.”[13]

A Fejér körül és hatására kialakult matematikai kör érdeklődésének irányát a mester matematikai sokoldalúsága határozta meg. Interpoláció, függvénysorok, számelméleti problémák, konstruktív függvénytan, az analízis konkrét, sokszor apró, de mégis mély részletekig menő kérdései és feladatai: mintha *Pólya György* és *Szegő Gábor* (szintén egykori Fejér-tanítványok) híres *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* című könyve elevenedett volna meg, olyan volt az a matematika, amelyet Fejér Pesten inspirált. Így pótolta egyetlen nagy professzor tudása, lelkiismeretessége, embersége és a tanítványok lelkesedése azt, amit az ország kultúrájának hivatalos vezetői elmulasztottak. A Fejér-iskola kibírta a fasizmus irtózatos pusztítását, s a szegedi matematika mellett ez volt a másik forrás, amelyből az újraszülető magyar matematika táplálkozott.

(A második, befejező részt következő számunkban közöljük.)

13 Turán Pál: *Fejér Lipót*. Matematikai Lapok, 11, 8–18, 1960.