

О ГРАФЕ ПОДГРУПП КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

B. CSÁKÁNY, G. POLLÁK (Г. Поллак - Б. Чакань), Szeged

(Поступило в редакцию 5/VI 1967 г.)

Понятие графа подполугруппы некоторой полугруппы было введено Й. Босаком в работе [2]. Поскольку в случае конечных групп это понятие является тривиальным, в настоящей заметке вводится аналогичное, но более подходящее для групп понятие графа подгрупп. Доказываются предложения о связности, а также оценки о диаметре графа подгрупп конечных групп. § 1 содержит основные определения и несколько общих замечаний; § 2 посвящен случаю непростых, а § 3 — случаю простых групп. Сформулируется также несколько открытых вопросов. Относительно терминологии мы ссылаемся на [7].

1

Хотя некоторые понятия и замечания переносятся без изменения и на общий случай, все же под группой мы будем понимать везде конечную группу.

Произвольной группе G поставим в соответствие граф Γ , где вершинами Γ служат все нетривиальные подгруппы G , а вершины H и K соединены ребром тогда и только тогда, если в $H \cap K$ содержится отличный от единицы элемент (для обозначения этого обстоятельства мы пишем: $H \sim K$). Γ называется *графом подгрупп группы G* .

Если граф подгрупп группы G является связным, мы, для краткости, говорим: G — *связна*. Аналогично, мы будем говорить о *расстоянии* нетривиальных подгрупп H и K в группе G , а также о *диаметре* связной группы G (обозначение: $\rho(H, K)$ и $\delta(G)$, соответственно).

Пусть опять H и K — нетривиальные подгруппы в G . Если найдутся в G такие нетривиальные подгруппы L_1, \dots, L_n , что $H \sim L_1, L_1 \sim L_2, \dots, L_{n-1} \sim L_n, L_n \sim K$, то мы говорим: H и K *соединены цепочкой* $H \sim L_1 \sim \dots \sim L_n \sim K$, или просто: имеет место $H \sim L_1 \sim \dots \sim L_n \sim K$. Ясно, что в этом случае $\rho(H, K) \leq n + 1$.

Транзитивное замыкание отношения \sim , т.е. отношение „могут быть соединены какой-либо цепочкой“ индуцирует разбиение множества всех нетривиаль-

ных подгрупп группы G . Берем любой класс полученного разбиения. Объединение всех подгрупп, составляющих этот класс, называется *блоком группы G* . Из определения следует, что блоки попарно пересекаются лишь в единичном элементе. Далее, ясно, что группа G является связной тогда и только тогда, если число ее блоков равно единице. Отметим, что всякая максимальная подгруппа входит в некоторый блок, и каждый блок является объединением входящих в него максимальных подгрупп.

Из определения блока непосредственно следует

Лемма 1. Пусть B — блок, а M — подгруппа группы G . Если в $B \cap M$ содержится элемент, отличный от 1, то имеет место либо $M \subseteq B$, либо $M = G$.

Полезным будет и следующая

Лемма 2. Произвольный блок B группы G является либо подгруппой, либо инвариантным (относительно внутренних автоморфизмов) множеством в G .

Доказательство. Допустим, что B не является подгруппой в G . Тогда существуют элементы $a, b \in B$, для которых $ab \notin B$. В силу леммы 1 имеем

$$(1) \quad \{a, b\} = \{a, ab\} = G.$$

Пусть теперь $B = \bigcup_{i=1}^k M_i$, где M_i ($i = 1, \dots, k$) — максимальные подгруппы в G .

Будем считать для определенности, что $a \in M_1, b \in M_2$ ($k > 1$, иначе B была бы подгруппой в G). Принимая во внимание $M_1^a (= a^{-1}M_1a) = M_1$, а также тот факт, что максимальные подгруппы, соединяемые какой-нибудь цепочкой, при автоморфизме переходят в такие же подгруппы, мы получим $B^a = B$. Аналогично получается $B^b = B$. Отсюда, ввиду (1) следует, что B отображается на себя при любом внутреннем автоморфизме G .

2

Сперва рассмотрим случай абелевых групп. Легко усмотреть, что простые циклические группы и только они обладают пустым графом. Одновершинным графом обладают лишь циклические группы порядка p^2 (p — простое число). Пусть теперь G — несвязная абелева группа, а H и K — нетривиальные подгруппы в G , не соединяемые никакой цепочкой. Тогда $H \cap K = 1; \{H, K\} = G$, в противном случае H и K соединились бы цепочкой $H \sim \{H, K\} \sim K$; наконец, H и K — простого порядка, ибо, если например H_1 — нетривиальная подгруппа в H , то H и K могут быть соединены цепочкой $H \sim \{H_1, K\} \sim K$. Таким образом, G — прямое произведение двух простых циклических групп. Отсюда видно также, что диаметр связной абелевой группы не превышает двух.

К общему случаю непростых групп относится

Теорема 1. Неабелевы непростые несвязные группы исчерпываются некоммутативными группами первой степени без центра. Диаметр остальных неабелевых непростых групп не превышает 4.

Замечание. Полное описание некоммутативных групп первой степени, т. е. неабелевых групп, все истинные подгруппы которых являются абелевыми, было дано Редди в [6], стр. 720—735. Из его результатов следует, что каждой упорядоченной паре различных простых чисел (p, q) соответствует единственная с точностью до изоморфизма некоммутативная группа первой степени без центра, которую мы обозначим через $R(p, q)$. Последняя определяется, как некоммутативное расщепляемое расширение элементарной абелевой группы M порядка p^m (где $m = o(p \pmod{q})$) при помощи циклической группы порядка q . Кроме того, из $R(p_1, q_1) \cong R(p_2, q_2)$ следует $p_1 = p_2, q_1 = q_2$, и все некоммутативные группы первой степени без центра представляются в виде $R(p, q)$ при подходящих p и q .

Доказательство. Допустим, что в непростой неабелевой группе G найдутся нетривиальные подгруппы H и K , неудовлетворяющие соотношению $o(H, K) \leq 4$. Покажем, что G — некоммутативная группа первой степени без центра.

Пусть M — минимальный (нетривиальный) нормальный делитель в G . Из неравенства треугольника следует, что хотя бы для одного из H, K — скажем, для H — не имеет места $o(M, H) \leq 2$. Отсюда $M \cap H = 1$ и $\{M, H\} = MH = G$, ибо в противном случае $M \sim H$, или $M \sim MH \sim H$, соответственно. Далее, H — группа простого порядка, потому что если бы H обладала нетривиальной подгруппой L , то M и H были бы соединены цепочкой $M \sim ML \sim H$.

Допустим, что G — связна. Тогда H и K могут быть соединены некоторой цепочкой $H \sim L_1 \sim \dots \sim L_n \sim K$. Будучи группой простого порядка, H является истинной подгруппой в L_1 . Поэтому $M \cap L_1$ — нетривиально, так что имеет место $M \sim L_1 \sim H$. Получено противоречие; значит G — несвязная группа. Отсюда видно также, что M и H принадлежат различным блокам G .

Покажем, что H совпадает со своим нормализатором $N_G(H)$ в G . В самом деле, если $H \subset N_G(H) \subset G$ (знак \subset означает истинное включение), то $M \sim N_G(H) \sim H$. Если же $N_G(H) = G$, то G разлагается в прямое произведение $M \times H$. Ввиду неабелевости G , M не может быть абелевой, но тогда M обладает нетривиальной подгруппой M_1 , так что имеем $M \sim M_1 \times H \sim H$.

Из только что доказанного следует, что число сопряженных с H подгрупп в G равно $o(M)$; так как они попарно пересекаются в 1, то и покрывают $G \setminus M$. Из леммы 2 следует, что блок B , содержащий M , является инвариантным множеством. Если $b \in B \setminus M$, то сопряженные с b элементы принадлежат к B , откуда получаем, что B и H обладают нетривиальным пересечением, что противоречит лемме 1. Таким образом, $B = M$, т. е. M — блок группы G .

Пусть теперь S — неединичная силовская p -подгруппа в M . Если $S \subset M$,

то из-за минимальности M имеем $N_G(S) \subset G$. По лемме Фраттини (см. напр. [1], стр. 117) $\{M, N_G(S)\} = G$, так что $N_G(S) \not\subseteq M$, что опять-таки в силу леммы 1 невозможно. Значит, $S = M$, т. е. M — p -группа. Как минимальный нормальный делитель, M является характеристически простым. Отсюда M — элементарная абелева p -группа.

Поскольку каждая истинная подгруппа в G является или подгруппой в M , или же сопряженной с H , то все истинные подгруппы G — абелевы, так что G — некоммутативная группа первой степени. Наконец, если G обладает центром Z , то из равенства $H = N_G(H)$ следует $Z \subseteq H$. $Z = H$ невозможно из-за неабелевости G ; таким образом, $Z = 1$.

С другой стороны, пусть $G \cong R(p, q)$, P и Q — силовские подгруппы G ($o(P) = p^m$, $o(Q) = q$). Допустим, что существует цепочка $Q \sim L_1 \sim \dots \sim L_n \sim P$, соединяющая Q с P . Тогда $Q \subset L_1$, так что $o(L_1) = p^n q$ ($0 < n < m$), и $L_1 \cap P$ — нетривиальная подгруппа в G , которая, очевидно, содержится в центре G , что противоречит предположению о строении G . Теорема доказана.

В дальнейшем мы сделаем несколько замечаний относительно диаметра связанных групп. Для таких групп следующие условия равносильны:

- 1) $\delta(G) = 1$.
- 2) G имеет единственную подгруппу простого порядка.

В самом деле, если P, Q — различные подгруппы простого порядка в G , то $o(P, Q) \geq 2$. С другой стороны, каждая неединичная группа содержит подгруппу простого порядка, поэтому 2) влечет 1).

Оказываются равносильными и условия

- 1) $\delta(G) \leq 2$.
- 2) G не порождается никакой парой различных подгрупп простого порядка.

Действительно, если $G = \{a, b\}$, где $o(a) = p$, $o(b) = q$ (p, q — простые числа) и $\{a\} \neq \{b\}$, то $\{a\} \cap \{b\} = 1$, а если $\{a\} \sim H \sim \{b\}$, то $H \cong \{a\}, \{b\}$, т. е. $H = G$. Обратно, при выполнении 2) пусть H, K — подгруппы в G , a и b — элементы простого порядка из H и K , соответственно. Тогда $H \sim \{a, b\} \sim K$. Отсюда следует $\delta(G) \leq 2$.

Рассмотрим теперь непростую группу G с диаметром 4. Пусть опять M — минимальный нормальный делитель в G , и пусть H, K — подгруппы в G с расстоянием 4. Мы имеем с одной стороны $o(M, H), o(M, K) \leq 2$, ибо в противном случае можно было бы доказать несвязность группы G таким же способом, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. С другой стороны имеет место $o(M, H), o(M, K) \geq 2$, иначе на основании неравенства треугольника получилось бы $o(H, K) < 4$. Значит, $o(M, H) = o(M, K) = 2$. Отсюда $M \cap H = M \cap K = 1$ и существуют цепочки $M \sim L_1 \sim H$ и $M \sim L_2 \sim K$, соединяющие M с H и K , соответственно. Если $MH \subset G$, то цепочка $H \sim MH \sim L_2 \sim K$ соединяет H с K , так что $o(H, K) \leq 3$, что противоречит предположению. Если

далее H обладает нетривиальной подгруппой Q , то H и K соединяются цепочкой $H \sim QM \sim L_2 \sim K$, что также невозможно.

Итак, G является расщепляемым расширением своего минимального нормального делителя M при помощи группы простого порядка H ($o(H) = p$). Из-за минимальности M будет характеристически простым, поэтому M представляется в виде прямого произведения нескольких экземпляров подходящей простой группы P (их число, конечно, может равняться единице).

Легко видеть при этом, что K тоже является группой порядка p ; кроме того, если $H = \{b\}$, то можно найти такое $c \in K$ ($c \neq 1$), что автоморфизм группы M , индуцированный элементом c , разлагается в произведение автоморфизма, индуцированного элементом b и некоторого внутреннего автоморфизма группы M .

Предположим теперь, что P — простого порядка, т. е. M — элементарная абелева группа. В этом случае, понятно, $M = P$ невозможно. Если найдется в G подгруппа Q со свойствами $M \cap Q \subset M$, $Q \not\subseteq M$, то $M \cap Q$ оказывается нетривиальным нормальным делителем в G , что противоречит минимальности M . Значит, такой подгруппы Q не существует; но тогда легко видеть, что G — некоммутативная группа первой степени без центра, т. е. по теореме 1 G — несвязна. Отсюда видно, что P — нециклическая простая группа.

Пусть $M = P_1 \times \dots \times P_k$ ($P_i \cong P; i = 1, \dots, k$). Тогда $M = (b^{-1}Mb) = M^b = P_1^b \times \dots \times P_k^b$. По теореме Ремака-Шмидта (см. [7]) существует такая подстановка $i \rightarrow i'$ ($i = 1, \dots, k$), что P_i^b и $P_{i'}$ — центрально изоморфны, т. е., поскольку M — без центра, $P_i^b = P_{i'}$. Таким образом, автоморфизм группы M , индуцированный элементом b , осуществляет подстановку факторов P_1, \dots, P_k . Учитывая, что при внутреннем автоморфизме прямые сомножители — неподвижны, получим, что $P_i^b = P_i^c$ ($i = 1, \dots, k$). Допустим $k > 1$. $i' = i$ ни для какой i не может быть, так как в этом случае H и K были бы соединены цепочкой $H \sim P_i H \sim P_i K \sim K$. Значит, для произвольного $a \in P_1$ ($a \neq 1$) элементы $a, a^b (= b^{-1}ab), a^{b^2}, \dots, a^{b^{p-1}}$ принадлежат попарно различным факторам P_i . Поэтому $U = \{a\} \{a^b\} \dots \{a^{b^{p-1}}\}$ — нетривиальная подгруппа в M . То же самое верно для $V = \{a\} \{a^c\} \dots \{a^{c^{p-1}}\}$. U и V пересекаются нетривиально, так что H и K соединены цепочкой $H \sim UH \sim VK \sim K$. Отсюда следует, что $k = 1$.

Мы доказали, что *непростая группа диаметра 4 должна быть расщепляемым расширением нециклической простой группы при помощи циклической простой*. Таким строением обладают симметрические группы S_n (в случае $n > 4$), но у них диаметр, как легко видеть, не превосходит трех. Вопрос о существовании непростой группы диаметра 4 является открытым.

3

Относительно связности неабелевых простых групп мы сделаем лишь некоторые замечания. Займемся сначала частным случаем знакопеременных групп.

Теорема 2. Если $n > 4$, то знакопеременная группа A_n является связной и $\delta(A_n) \leq 4$.

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение. Легко видеть, что при $1 \subset H' \subseteq H \subset A_n$, $1 \subset K' \subseteq K \subset A_n$ имеет место $\varrho(H, K) \leq \varrho(H', K')$; поэтому можем ограничиваться доказательством соотношения $\varrho(H, K) \leq 4$ для H, K простого порядка. Пусть $o(H) = p$, $o(K) = q$. Различаем три случая.

I) $p < n$, $q < n$. Тогда как H , так и K имеет нетривиальное инвариантное множество Γ_H, Γ_K переставляемых символов. Предположим при этом, что Γ_H и Γ_K являются инвариантными множествами наименьшей мощности соответствующих групп. Обозначим через D_{Γ_H} и D_{Γ_K} группы всех четных подстановок, оставляющих инвариантными подмножества Γ_H и Γ_K , соответственно. Группа $D_{\Gamma_H} \cap D_{\Gamma_K}$ состоит из всех четных подстановок оставляющих инвариантными множества $\Gamma_H \cap \Gamma_K$, $\Gamma_H \setminus \Gamma_K$, $\Gamma_K \setminus \Gamma_H$ и $\langle 1, 2, \dots, n \rangle \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_K)$. Если хотя бы одно из этих множеств содержит больше чем два элемента, или хотя бы два множества содержат по два элемента, то, очевидно, $D_{\Gamma_H} \cap D_{\Gamma_K} \neq 1$. Однако это выполняется тривиальным образом при $n \geq 6$, а при $n = 5$ (как и при любом простом n) Γ_H и Γ_K состоят каждый из одного элемента, так что $\langle 1, 2, \dots, n \rangle \setminus (\Gamma_H \cup \Gamma_K)$ содержит не меньше трех элементов. Таким образом имеем $H \sim D_{\Gamma_H} \sim D_{\Gamma_K} \sim K$ и $\varrho(H, K) \leq 3$.

II) $p < n$, $q = n$. В этом случае, как мы только что отметили, $o(\Gamma_H) = 1$, т. е. H оставляет неподвижным некоторый символ k ($\leq n$). Пусть теперь g — первообразный корень mod q . Тогда легко найти подстановку β в симметрической группе S_n , оставляющую символ k неподвижным, для которого $\beta^{-1}\alpha\beta = \alpha^g$ ($\{\alpha\} = K$; см. [6], стр. 139). При этом β оказывается циклом порядка $q - 1$, так что $\beta^2 \neq 1$, $\beta^2 \in D_{\langle k \rangle}$ и $\beta^2 \in N_{A_n}(K)$. Ввиду простоты A_n , H и K соединены цепочкой $H \sim D_{\langle k \rangle} \sim N_{A_n}(K) \sim K$.

III) $p = q = n$. Тогда двукратным применением рассуждения из II) получается цепочка $H \sim N_{A_n}(H) \sim D_{\langle n \rangle} \sim N_{A_n}(K) \sim K$.

Мы видим, что $\delta(A_n) = 4$ влечет за собой простоту числа n . Вопрос о существовании знакопеременной группы диаметра 4 является открытым. С другой стороны, для произвольных n можно показать, что $\delta(A_n) \geq 3$.

Остается открытой и проблема существования несвязной неабелевой простой группы. Для некоторых отдельных простых групп связность устанавливается сопоставлением некоторых известных теорем о простых группах и следующей леммы:

Лемма 3. Пусть G — простая группа; B_1, \dots, B_k — блоки в G . Существуют такие натуральные числа π_1, \dots, π_k , что

- 1) $o(G) = \pi_1 \dots \pi_k$,
- 2) если $i \neq j$, то π_i и π_j — взаимно просты ($1 \leq i, j \leq k$),
- 3) $a \in B_i$ и $o(a) \mid \pi_i$ — равносильны для любого $a \in G$.

Доказательство. Если $o(G) = p_1^{e_1} \dots p_n^{e_n}$ (p_i — простые числа), то в качестве π_i ($i = 1, \dots, k$) берем произведение всех тех $p_i^{e_i}$, для которых существует в B_i элемент порядка p_i . Покажем, что π_i , определенные таким образом, удовлетворяют требованиям 1)–3).

Каждый блок B_i простой группы G является инвариантным множеством в G . Чтобы убедиться в этом, ввиду леммы 2 достаточно доказать, что B_i не может быть истинной подгруппой в G . Допустим противное; тогда по лемме 1 B_i совпадает со своим нормализатором в G и пересекается со всеми своими сопряженными в 1, так что по теореме Фробениуса в G найдется нетривиальный нормальный делитель [7].

Если теперь для некоторых $1 \leq l \leq n$ и $1 \leq i, j \leq k$ выполняется $p_l \mid (\pi_i, \pi_j)$, то существуют $a \in B_i$, $b \in B_j$, такие, что $o(a) = o(b) = p$. Силловские p -подгруппы в G , содержащие a и b , являются сопряженными и поэтому принадлежат одному и тому же блоку, откуда получим $B_i = B_j$ и $\pi_i = \pi_j$. Итак, имеет место 2); отсюда сразу же следует и 1). После этого 3) доказывается вполне тривиальным образом.

Приводим примеры. Согласно известному результату Янко, группа не может быть простой, если она обладает нильпотентной максимальной подгруппой, силловская 2-подгруппа которой является метабелевой [3]. Отсюда вытекает связность групп $LF(2,7)$, $LF(2,2^3)$ и $LF(2,2^4)$. Другие теоремы Янко о цепочках подгрупп простых групп позволяют убедиться в связности $LF(2,11)$, $LF(2,17)$ и $LF(2,19)$ (см. [4], [5]).

Литература

- [1] R. Baer: Classes of finite groups and their properties, Illinois J. Math. 1 (1957), 115–187.
- [2] J. Bosák: The graphs of semigroups, Proc. Sympos. Smolenice, 1963, 119–125.
- [3] Z. Janko: Verallgemeinerung eines Satzes von B. Huppert und J. G. Thompson, Arch. Math., 12 (1961), 280–281.
- [4] Z. Janko: Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen, Math. Zeitschrift, 79 (1962), 422–424.
- [5] Z. Janko: Finite groups with invariant fourth maximal subgroups, Math. Zeitschrift, 82 (1963), 82–89.
- [6] L. Rédei: Algebra, Leipzig, 1959.
- [7] A. Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin, 1937.

Адрес авторов: József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézet, Szeged, Aradi vértanúk tere 1, Hungary.