POLYGON
XVII.köt., 2.sz., 2009. okt.

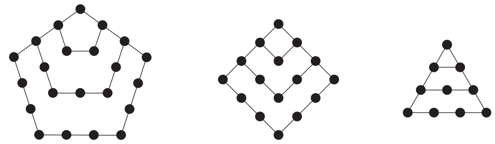
Ezeregy

Csákány Béla

1001 lépten-nyomon. A cím számnév, amelyről először a klasszikus irodalmi mű, az Ezeregyéj juthat eszünkbe, teljesebb nevén az Ezeregy éjszaka meséi. Miért éppen *ezeregy* éjszaka? Ezekből a mesékből valójában nem pontosan ezeregy van (egyes kiadásokban több vagy kevesebb), az „ezeregy" itt csak temérdeket jelent. Amikor az angol *sok*, a német *szép*, az orosz *nagy* köszönetet mond, az arab *ezeregy* köszönettel fejezi ki hálaját. E triviális nyelvészeti megjegyzés mellett cikkünk végén matematikailag is „megindokoljuk" Seherezádé meséinek számát egy további mesébe szőtt kombinatorikai (összeszámlálási) feladattal.

Magyar olvasó gondolhat első királyunk koronázásának évére is, bár e kérdésben a történészek véleménye megoszlik: egyesek szerint a nagy történelmi eseményre nem 1001. január elsején, hanem az ezredik év karácsonyán került sor. Matematikus számára az 1001 természetes szám legismertebb érdekessége, hogy $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, aminek számos következménye van. Egy példa: ha egy pásztor csak 13-ig tud számolni (sőt: csak számlálni!), akkor akár ezer jószágból álló csordájáról is meg tudja állapítani, nem hiányzik-e belőle. Az eljárás kissé hosszadalmas, de korrekt: reggel, a karámból kihajtva az állatokat, megszámlálja őket hetesével, majd tizenegyesével (célszerűen visszahajtva őket a karámba, amin az intelligensebb jószág ugyancsak elcsodálkozik), végül tizenhármasával, és megjegyzi a három maradékot. Esti behajtáskor ugyanezt csinálja, s ha a maradékok rendre megegyeznek, akkor nyugodt lehet: a csorda hiánytalan. Ez a kínai maradéktételből (annak is az egyértelműségi állításából) következik, lásd pl. [4], 38. o. A 11-gyel való oszthatóság eldöntésének jól ismert módszerét természetes módon átalakítva az 1001-gyel való oszthatóságot is meg tudjuk állapítani (hogyan?). Ezáltal lehetővé válik a 7-tel és a 13-mal való oszthatóság eldöntése is az osztás elvégzése nélkül.

Kevésbé ismert tény, hogy 1001 *ötszögszám.* Így nevezzük az n számot, ha létezik olyan k, hogy n pontot a túloldali ábrán látható módon el lehet helyezni



k számú egymásba skatulyázott szabályos ötszögben. Az ábra azt is mutatja, hogy ez a definíció a négyzetszám és a háromszögszám definícióját utánozza. Hasonlóan az utóbbiak sorozataihoz, az ötszögszámok is másodrendű számtani sorozatot alkotnak (vagyis a szomszédos ötszögszámok különbségeinek sorozata számtani sorozat): $1, 5, 12, 22, \ldots$. Van tehát olyan $ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény, amelynek az i helyen felvett értéke éppen az i-edik ötszögszám. Innen a, b és c három egyenletből álló lineáris egyenletrendszer megoldásaként kiszámítható: $a = 3/2$, $b = -1/2$, $c = 0$. Eszerint az ötszögszámok az $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ függvény értékei a pozitív egész számokon. Speciálisan, $1001 = f(26)$ ötszögszám.

Ugyancsak szerepelteti 1001-et Péter Rózsa *Játék a végtelennel* című sokszor kiadott könyvében [5]. Az e számról írva elmagyarázza, hogy 1001/1000 ezredik hatványa miért alkalmas logaritmus alapszámának (130-132. oldal), másutt pedig arra vezet rá, hogy ugyanennek a törtnek a kis kitevős hatványait tizedestörtként egymás alá írva a Pascal-háromszög első sorai tűnnek elő (gondoljuk meg, hány sor!). Ezekben a példákban azonban nem lényeges, hogy éppen 1001-ről van szó; helyette 101 vagy 10001 is megtenné.

1001 a Pascal-háromszögben. A szóban forgó számmal egy alkalommal váratlanul találkoztam. Amikor a binomiális együtthatók szokásos táblázatát megismerjük, vagy bemutatjuk, rendszerint csak néhány sort írunk fel belőle. Szemléltetni akarván, hogy a Fibonacci-számok, meg a Catalan-számok hogyan olvashatók le a Pascal-háromszögről* , felírtam a Pascal-háromszög első 16 sorát, kezdve $\binom{0}{0}$-val (ez a nulladik sor), és befejezve $\binom{15}{15}$-tel. A 15. sor így kezdődik:

$$1 \quad 14 \quad 91 \quad 364 \quad 1001 \quad 2002 \quad 3001 \quad \ldots$$

* A teljesség kedvéért: az F_n Fibonacci-számokat az $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1} (k \geq 1)$ szabályok definiálják, míg a valamivel kevésbé ismert, de ugyancsak gyakran előforduló C_n Catalan-számokat a $C_0 = 1$, $C_k = C_0C_{k-1} + C_1C_{k-2} + \cdots + C_{k-1}C_0 (k \geq 1)$ szabályok. A Fibonacci-számok mindegyikét egy-egy ferde egyenes vonal mentén elhelyezkedő összes binomiális együtthatók összege adja, míg a Catalan-számokat két alkalmas függőleges egyenes vonalon lévő binomiális együtthatók különbségei.

Felbukkant 1001. Ráadásul, ha egy pillanatra az $1001 = \binom{14}{4} = A$, $2002 = \binom{14}{5} = B$, $3003 = \binom{14}{6} = C$ jelöléseket használjuk, akkor az A, B, C számokra a következők is szemünkbe tűnnek:

(I) $B = 2A, \quad C = 3A$.
(II) $B - A = C - B$, azaz $A, \ B, \ C$ számtani sorozat.
(III) $A + B = C$.

Megvizsgáljuk, vannak-e a Pascal-háromszög más soraiban is olyan egymás után következő A, B, C számok, amelyekre az (I), (II), (III) összefüggések valamelyike érvényes. Ez nem három *független* feladat, hiszen *tetszőleges* A, B, C számokra (I) pontosan akkor teljesül, ha (II) és (III) teljesül. Ezért elegendő lenne a (II) és (III) összefüggésekkel foglalkozni. Mivel azonban (I) vizsgálata sokkal egyszerűbb, vele fogunk kezdeni. Bemelegítésként pedig megnézzük, hányszor fordul elő 1001 a Pascal-háromszögben.

Amint láttuk, $\binom{14}{4} = \binom{14}{10} = 1001$, továbbá $\binom{1001}{1} = \binom{1001}{1000} = 1001$. Megmutatjuk, hogy más binomiális együtthatók értéke nem lehet 1001. Ha $n \geq 4$, akkor $\binom{n}{4} < \binom{n+1}{4}$. Ezért, ha egy, a látottaktól különböző (n, k) párra $\binom{n}{k} = 1001$, akkor $k \leq 3$. Ha $k = 2$, a binomiális együtthatót kifejtve az $n^2 - n - 2002 = 0$ egyenletet kapjuk, s ennek nincs egész megoldása, mert a megoldóképlet alkalmazásakor a négyzetgyökjel alatt nem négyzetszám áll. Ha pedig $k = 3$, hasonlóan az $n(n-1)(n-2) = 6006$ egyenlethez jutunk. Ezt kielégítő egész n sem létezik; a bizonyításhoz csak a természetes számok prímekre bontásának egyértelműségét kell használnunk.

A továbbiakhoz is csak elemi matematikai ismeretekre lesz szükségünk: a pithagoraszi számhármasok előállítására*, valamint a Fibonacci- és a Lucas-számokra vonatkozó néhány egyszerű összefüggésre. Az utóbbiak igazolását majd röviden vázoljuk.

I. $1001 = \binom{14}{4}$ *az egyetlen szám a Pascal-háromszögben, amelytől egy hellyel jobbra a kétszerese, két hellyel jobbra a háromszorosa áll.*

Az állítást így is kimondhatjuk: Ha $\binom{n}{k} = 2\binom{n}{k-1}$ és $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k-1}$, akkor $n = 14$, $k = 5$ és $\binom{n}{k-1} = 1001$.

Az $\binom{n}{k} = 2\binom{n}{k-1}$ egyenletből azonnal adódik a vele ekvivalens $n = 3k - 1$, tehát végtelen sok olyan binomiális együttható van, amely kétszerese a sorában őt közvetlenül megelőzőnek, s ezek éppen a $\binom{3k-1}{k}$ számok minden k pozitív egészre. Tegyük fel, hogy $\binom{n}{k+1} = 3\binom{n}{k-1}$ is teljesül. Ez az $n^2 - (2k-1)n - (2k^2 + 4k) = 0$ egyenletté írható át, ahonnan a megoldóképlettel

---

* Ha $a, \ b, \ c$ relatív prím számok, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$, ahol a és b közül a a páratlan, akkor léteznek olyan u és v relatív prím páratlan számok, hogy $a = uv$, $b = (u^2 - v^2)/2$, $c = (u^2 + v^2)/2$.

$$n = \frac{2k-1+\sqrt{12k^2+12k+1}}{2} = 3k-1$$

adódik (a gyökmennyiséget csak pozitív előjellel vettük figyelembe, mert csak pozitív megoldást keresünk). A k-ra ilyen módon nyert egyenlet egyetlen pozitív megoldása $k = 5$, innen pedig $n = 14$. Az I. összefüggés tehát a Pascal-háromszögnek csak egyetlen helyén, az 1001, 2002, 3003 számokra teljesül.

II. *A Pascal-háromszög végtelen sok sorában van egy-egy olyan szomszédos számhármas, amely pozitív különbségű számtani sorozatot alkot.*

Legyenek $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$ ilyen számok. Akkor

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}, \tag{1}$$

ami az $n^2-(4k+1)n+(4k^2-2) = 0$ egyenletté írható át. Ennek az egész megoldásai:

$$\frac{n = 4k+1 \pm \sqrt{8k+9}}{2,}$$

ahol $8k+9$ négyzetszám. Gondoljuk meg, hogy $8k+9 = (2t+1)^2$ akkor és csak akkor, ha $k = t(t+1)/2 - 1$. Ezért t minden egynél nagyobb értékére kapunk egy olyan pozitív k-t, amelyre $8k+9$ négyzetszám, a megoldóképletből pedig az $n = (t+1)^2 - 2$ és $n = t^2 - 2$ értékeket. A $k+1 \le n$ hallgatólagos feltevés miatt, ami csupán azt fejezi ki, hogy keresett számtani sorozatainknak benne kell lenniük a Pascal-háromszögben , $n = t^2-2$ csak 2-nél nagyobb t-re adja feladatunk megoldását. Nyertük, hogy

$$\binom{(t+1)^2-2}{t(t+1)/2-1} \quad (t = 2, 3, \ldots),$$

továbbá

$$\binom{t^2-2}{t(t+1)/2-1} \quad (t = 3, 4, \ldots)$$

az (1) egyenletet kielégítő $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatók. Az előbbiek a Pascal-háromszög középvonalától balra vannak, és ezért pozitív különbségű számtani sorozatok középső elemei. Az utóbbiakat pedig $\binom{(t+1)^2-2}{(t+1)(t+2)/2-1}$ $(t = 2, 3, \ldots)$ alakban is írhatjuk, amiből látható, hogy ezek az előbbiek tükörképei a Pascal-háromszög középvonalára vonatkozóan. A t paraméter 2,3,4,5 értékeire a következő pozitív különbségű számtani sorozatokat kapjuk, amelyek közepén rendre a $\binom{7}{2}$, $\binom{14}{5}$, $\binom{23}{9}$, $\binom{34}{14}$ binomiális együtthatók állnak:

$$\begin{gathered}7,\ 21,\ 35\\ 1001,\ 2002,\ 3003\\ 490314,\ 817190,\ 1144066\\ 927983760,\ 1391975640,\ 1855967520\end{gathered}$$

Az alkalmas $\binom{n}{k}$ számok t növelésével igen gyorsan nőnek, pl. ha $t = 10$,

$$\binom{n}{k} = \binom{119}{54} = 2927954513485359445537361760812294 1.$$

Gondolatmenetünkből látszik, hogy rögzített n-hez legfeljebb egy olyan k tartozik, amelyre (n, k) kielégíti (1)-et. Ebből következik, hogy a Pascal-háromszög egy sorának *négy* egymás melletti eleme nem alkothat számtani sorozatot. Ezt szemléletes meggondolás is mutatja: A $(0, \binom{n}{0})$, $(1, \binom{n}{1}), \ldots$, $(k, \binom{n}{k}), \ldots$ $\ldots, (n, \binom{n}{n})$ pontok haranggörbén helyezkednek el*, másrészt, ha a_0, a_1, a_2, a_3 számtani sorozat, akkor az(i, a_0), $(i+1, a_1)$, $(i+2, a_2)$, $(i+3, a_3)$ pontok egy egyenesen vannak. Haranggörbét egyenes azonban nem metszhet négy helyen.

III. *A Pascal-háromszög végtelen sok sorában van két olyan szomszédos szám, amelyek összege a tőlük közvetlenül jobbra álló szám.*

Az ilyen $\binom{n}{k-1}$ és $\binom{n}{k}$ számokra

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1}, \tag{2}$$

ami ekvivalens az $n^2 - 3kn + (k^2 - 2k - 1) = 0$ egyenlettel. Azt kell belátnunk, hogy végtelen sok (n, k) számpárra

$$n = \frac{3k \pm \sqrt{k^2 + (2k+2)^2}}{2}. \tag{3}$$

Ha (n, k) ilyen számpár, akkor a gyökjel alatti szám négyzetszám; jelölje p^2. Látjuk, hogy $(k, 2k+2, p)$ pithagoraszi számhármas. Tegyük fel, hogy k páratlan. Akkor $k, 2k+2$ és p relatív prímek, léteznek tehát olyan relatív prím páratlan u, v számok, hogy

* $\binom{n}{k}$ a várható értéke az n magasságú Galton-deszkán legurított 2^n számú golyó közül a k-adik rekeszbe kerülő golyók számának; lásd pl. [1], 182-183. o.

$$k = uv, \quad 2k+2 = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad p = \frac{u^2+v^2}{2}. \tag{4}$$

Innen

$$u^2 - v^2 = 4uv + 4. \tag{5}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete szerint $v = -2u + \sqrt{5u^2 - 4}$ (v pozitív, így a második tagot csak + előjellel vesszük figyelembe). A gyökjel alatt itt is egy q^2 négyzetszám áll, amelyre tehát teljesül

$$q^2 - 5x^2 = -4. \tag{6}$$

Most kis kitérőt teszünk. *Lucas-számoknak* nevezzük az $1, 3, 4, 7, 11, \ldots$ számokat. Jelölésük: $L_1, L_2, \ldots$; formális definíciójuk csak abban különbözik a Fibonacci-számokétól, hogy a második Lucas-szám nem 1, hanem 3. Ismerkedés céljából egymás alá írjuk az első tíz Fibonacci-számot és Lucas-számot:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_i	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_i	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Megfigyeljük és teljes indukcióval be is láthatjuk, hogy $i > 1$-re $L_i = F_{i-1} + F_{i+1}$. (Ha nulladik Fibonacci-számnak a 0-t tekintjük, akkor ez $i = 1$-re is igaz.) Másik alapvető összefüggés a Fibonacci-számok és a Lucas-számok között: minden pozitív egész i-re

$$L_i^2 - 5F_i^2 = (-1)^i \cdot 4. \tag{7}$$

Az előző azonosságot és a Fibonacci-számok definícióját használva (7) az ugyancsak nevezetes

$$F_{i-1}F_{i+1} - F_i^2 = (-1)^n \tag{8}$$

összefüggéssé alakítható át*, az utóbbit pedig (csupán a Fibonacci-számok definíciójának többszöri alkalmazásával) teljes indukcióval igazolhatjuk.

* A (8) azonosság a 17. századi nagy csillagász Cassini nevéhez fűződik.

A (6) és (7) egyenleteket összehasonlítva látjuk, hogy

$$q = L_i, \quad u = F_i$$

megoldásai (6)-nak, valahányszor i és F_i egyidejűleg páratlan szám. Ekkor a megoldóképletből $v = -2F_i + L_n = F_{i-3}$. A (8) azonosságot alkalmazva adódik, hogy az így nyert u, v kielégíti (5)-öt. Belőlük (4) szerint képezhető $k = F_i F_{i-3}$ és $p = (F_i^2 + F_{i-3}^2)/2$. Most (3) alapján meghatározhatjuk a k-val együtt alkalmas párt alkotó n-et. Nem nehéz gyakorlat a kapott n és k számokat a barátságos $n = F_{i-1}F_i - 1$, $\quad k = F_{i-2}F_{i-1} - 1$ alakra hozni; ehhez is csak a Fibonacci-számok definícióját és a (8) azonosságot kell használnunk. Mivel végtelen sok olyan páratlan i van, amelyre F_i is páratlan, továbbá különböző i-kre különböző (n, k) párokat kapunk, a III. állítást beláttuk. Ráadásként az is kiderült, hogy a (2)-t kielégítő (n, k) párok között végtelen sok olyan is van, amelyben k páratlan.

Hasonlóan vizsgálható a páros k esete; ezt nem részletezzük. Az eredmény is hasonló: minden olyan egynél nagyobb páratlan i-re, melyre F_i és F_{i+1} is páratlan, $n = F_{i+1}F_{i+2} - 1$, $\quad k = F_i F_{i+1} - 1$. Figyelembe véve, hogy Fibonacci-szám pontosan akkor páros, ha sorszáma osztható 3-mal, a két esetre kapott megoldásainkat tömören így írhatjuk le:

$$\binom{n}{k} = \binom{F_i F_{i+1} - 1}{F_{i-1}F_i - 1} \quad (i = 4, 6, 8, \ldots).$$

Ez a sorozat még gyorsabban nő, mint az, amellyel II.-t igazoltuk. Ha $i = 4, \ldots, 12$, rendre a következő binomiális együtthatókat kapjuk:

$$\binom{14}{5}, \quad \binom{103}{39}, \quad \binom{713}{272}, \quad \binom{4894}{1869}, \quad \binom{33551}{12815}.$$

Közülük az utolsó tízes számrendszerben 9688 számjeggyel írható fel.

(2)-vel ekvivalens egyenletet oldott meg D. A. Lind [2] és David Singmaster* [6], további számelméleti ismeretek felhasználásával. Singmasternek az tűnt fel, hogy 3003 legalább hat különböző módon írható fel binomiális együtthatóként (mivel a (2) egyenlet azt is jelenti, hogy $\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$), és cikke főeredményének tekintette, hogy végtelen sok természetes számnak van meg ez a tulajdonsága. Azt is megállapította, hogy 3003 pontosan nyolc helyen szerepel a Pascal-háromszögben. Ezt mi is beláthatjuk, ahhoz hasonlóan, ahogyan 1001 előfordulásainak számát meghatároztuk.

---

* A Rubik-kocka jeles szakértője és népszerűsítője.

1001 a szerves kémiában. Térjünk vissza az Ezeregy éjszaka meséihez. Amikor a szépséges Seherezádé első csodálatos meséjét befejezte, a kegyetlen szultán Sahriár – a történet közismert változatától eltérően – azonnal megérezte, hogy legújabb hitvesét sohasem tudná elveszejteni. Szólította hát az ügyeletes eunuchot, s előhozatott egy nemkevésbé csodálatos nyakláncot, amelyre 14 pompás drágakő, mégpedig kilenc rubin és öt zafír volt felfűzve. Tőle szokatlan gyöngédséggel kapcsolta fel Seherezádé nyakára, és így szólt: „Valahányszor újabb gyönyörűséges mesével andalítasz el, mindannyiszor ugyanennyi rubin- és zafírkőből készített nyaklánccal jutalmazlak majd meg, és különböző mesékért különbözőképpen összerakott nyaklánc jár!”

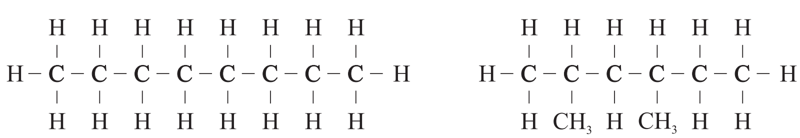
Ennyi volt a cikk elején ígért mese. A kombinatorikai feladat: hány éjszakán át tudta teljesíteni ígéretét a mérhetetlen kincsek fölött rendelkező szultán? Elsiethetjük a választ: a kék zafírkövek helyét a 14 drágakő között $\binom{14}{5}$ különböző módon jelölhetjük ki, és ez a szám 2002, ami jó ismerősünk ugyan, mégis gyanús, hiszen kerekebb lenne a történet, ha az derülne ki, hogy a megoldás 1001. Segítsünk magunkon: nézzük meg az alábbi két nyakláncot:

○–R–Z–R–Z–Z–R–Z–R–Z–R–R–R–R–R–○

○–R–R–R–R–R–Z–R–Z–R–Z–Z–R–Z–R–○

Ezek *nem* különbözők! Az alsót megfordítva (azaz két végét megcserélve) éppen a felsőt kapjuk. Eszerint a zafírkövek öt helyének kiválasztásakor kétféleképpen is megkapunk minden lehetséges nyakláncot. (Tekintsük a következő állítást: „a nyaklánc megfordítása az összes nyakláncok halmazának olyan transzformációja, amelynek nincs fixpontja”, és gondoljuk meg, hogy ez akkor és csak akkor igaz, ha az összes drágakövek száma páros, a rubin- és zafírkövek száma pedig páratlan.) A helyes válasz tehát 1001.

Megoldottunk egy színezett lánc-gráfok összeszámlálására vonatkozó apró feladatot. Ezt általánosabban, 14 és 5 helyett tetszőleges n-re és k-ra ($k \leq n$) megoldotta Szima Lozanics szerb kémiatudós* 1897-ben [!] megjelent dolgozatában [3], amely a *paraffinok izomerjeinek* összeszámlálásáról szól. A paraffinok (vagy alkánok) C_nH_{2n+2} összegképletű (más szóval tapasztalati képletű) szénhidrogének. Szerkezeti képletükre példák:



* Nevét angol és német szövegekben Lozanić ill. Losanitsch alakban írják.

Mindkettő képlete C_8H_{18}, míg azonban az elsőben a nyolc szénatom egyetlen láncot (ún. egyenes szénláncot) alkot, a másodikban csak hat atomos egyenes szénláncot találunk, amelyhez két helyen hidrogénatom helyett egy-egy CH_3 képletű *metilcsoport* kapcsolódik. Itt a szénatomok (mint pontok) a köztük lévő egyszeres kémiai kötésekkel (mint élekkel) szaknyelven elágazó szénláncot, matematikai nyelven fát képeznek, amelyben minden elem fokszáma legfeljebb 4. Az első vegyületet normális oktánnak, a másodikat izo-oktánnak (vagy az oktán egyik izomerjének) nevezzük, mivel azonban az oktánnak sok más izomerje is van (ti. nyolc szénatom a köztük lévő egyszeres kémiai kötésekkel nem csak a fenti két módon alkothat *fát*), a bemutatott izo-oktánnak olyan nevet is adnak a vegyészek, amelyből kiderül a szerkezeti képlete: $2,4$-dimetilhexán. Itt 2 és 4 azt adja meg, hányadik szénatomhoz kapcsolódó hidrogénatomot helyettesíti metilcsoport, a *hexán* név pedig azt mutatja, hogy megnevezett izo-oktán-molekulánk a *hat* atomos egyenes szénláncú normális paraffinmolekula módosításával keletkezett. Másik példa a $2,2$-dimetilpropán; mivel a normális propán egyenes szénlánca három szénatomból áll, a névből kiviláglik, hogy ennek a paraffinnak a „szénfájában" van 4 fokszámú atom.

Többek között beszélhetnénk pl. $3,5$-dimetilhexánról is, de nem beszélünk, mert ennek a szénfája izomorf a $2,4$-dimetilhexánéval (ti. abba „átfordítható"), és ezért a két anyag kémiailag egyformán viselkedik. Nem beszélünk továbbá $1,3$-dimetilhexánról sem, mert ez már 4-metilheptán lenne; más szóval, metilcsoportot egyenes szénlánc szélső atomjaihoz nem kapcsolunk. Ha tehát össze akarjuk számlálni a lehetséges dimetilhexánokat, egyrészt meg kell állapítnunk, hány különböző módon választhatunk ki kettőt a hat atomból álló normális szénlánc négy belső atomja közül, nem tekintve különbözőnek az olyan kiválasztásokat, amelyek egymás tükörképei a lánc középpontjára vonatkozóan, és hány helyen lehet 4 fokszámú szénatom a dimetilhexán szénfájában. Látjuk, hogy a keresett szám $4 + 2 = 6$.

Lozanics – a különböző paraffinok számára vonatkozó számos eredménye között – meghatározta az $n + 2$ atomos egyenes szénláncból k számú különböző belső szénatomhoz kapcsolódó hidrogénatom metilcsoporttal való helyettesítése által keletkező paraffinok számát tetszőleges $n(\geq 0)$-ra és $k = 0, 1, \ldots, n$-re. Ezeket a számokat a Pascal-háromszöghöz hasonló táblázatba foglalta, amelyet az utókor Lozanics-háromszögnek nevez. Néhány sorát itt látjuk, kiemelve a páros sorszámú sorok páratlan sorszámú elemeit:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{1} \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{2} \quad 4 \quad \mathbf{2} \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad \mathbf{3} \quad 9 \quad \mathbf{10} \quad 9 \quad \mathbf{3} \quad 1
\end{array}$$

A sorokat és elemeiket a Lozanics-háromszögben is 0-val kezdve számozzuk. Az n-edik sor k-adik elemét itt $L(n,k)$ fogja jelölni; ez a szám azt mondja meg, hány különböző módon származtathatunk $n+2$ atomos egyenes szénláncú paraffinból új paraffint a szénlánc különböző belső atomjaihoz kapcsolódó k számú hidrogénatom metilcsoporttal való helyettesítése útján. Kicsit absztraktabban: $L(n,k)$ a száma egy n elemű lánc páronként nemekvivalens k elemű részhalmazainak, ha ekvivalensnek azokat a részhalmazokat tekintjük, amelyek egymás tükörképei a lánc középpontjára vonatkozóan. Speciálisan, $L(14,5)=1001$, hiszen a mesebeli nyakláncok összeszámlálása ugyanaz, mint a 16 – (és így 14 belső) – szénatomot tartalmazó egyenes szénláncú olyan paraffinoké, melyekben öt hidrogénatomot helyettesít metilcsoport. A szerkezeti képletet is jelző terminológiát használva: 1001 a különböző olyan pentametilhexadekánok száma, amelyek szénfájának pontjai legfeljebb harmadfokúak (vagy, a szerves kémikusok nyelvén, amelyekben nincs kvaterner szénatom).

A Lozanics-háromszög számait könnyű felírni. Már kiderült, hogy ha n páros és k páratlan, akkor $2L(n,k)=\binom{n}{k}$. Ha $k=0$ vagy $k=n$, akkor nyilvánvalóan $L(n,k)=1$. A hátramaradt esetben pedig a Pascal-háromszög képzési szabályához hasonlóan $L(n,k)=L(n-1,k-1)+L(n-1,k)$. A bizonyítás is hasonló: kijelöljük az n elemű lánc középső (páros n esetén egyik középső) elemét, s $L(n-1,k-1)$ lesz a kijelölt elemet tartalmazó páronként nemekvivalens k elemű részhalmazok száma, míg $L(n-1,k)$ a kijelölt elemet nem tartalmazóké.

Befejezésül két feladat:

1. Hány különböző pentametilhexadekán létezik?

2. Hány különböző olyan nyaklánc létezik, amelynek 18 ékköve közül öt rubin, a többi zafír, és miközben Sahriár felemeli, nincsenek rajta szomszédos rubinkövek?

Irodalom

[1] Csákány Béla, *Kis matematikai szintézis*, Polygon, 2003.

[2] D. A. Lind, The quadratic field $Q(\sqrt{5})$ and a certain Diophantine equation, The Fibonacci Quarterly, 6. kötet (1968), 86-93.

[3] S. M. Losanitsch, Die Isomerie-Arten bei den Homologen der Paraffin-Reihe, Chemische Berichte, 30. kötet (1897), 1917-1926.

[4] Megyesi László, *Bevezetés a számelméletbe*, Polygon, 1997.

[5] Péter Rózsa, *Játék a végtelennel*, 7. kiadás, Typotex, 1999.

[6] D. Singmaster, Repeated binomial coefficients and Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly, 13. kötet (1975), 295-298.