POLYGON
XIX.köt., 1.sz., 2010. szept.

Lámpácskás játékok I

Csákány Béla, Juhász Rozália, Makay Géza

1. Egy mai történet. A császár aggodalmaskodó arccal fordult Assassin marsallhoz, frissen kinevezett belügyminiszteréhez:

—Gondolod, hogy meg lehet csinálni?

—Felséged kívánsága számomra parancs. Azonnal behozatok néhány kitűnő mérnököt, s csak akkor kerülnek szabadlábra, ha megoldják a problémát — válaszolt a miniszter, gondosan megigazítva kitüntetéseit, köztük a Mesterlövész Érdemkereszt tiszti fokozatát.

—Akkor és csak akkor? — kacsintott vissza az uralkodó.

—Ez attól függ majd, lesznek-e felségednek további rendelkezései — vette a lapot Assassin.

Hogy ne csigázzuk tovább az olvasó kíváncsiságát, elmondjuk, hogy a fenti beszélgetés színhelye a távoli Okatootáia*, amelynek előző császára néhány nappal korábban galád merénylet áldozata lett. A tragikus sorsú uralkodót ismeretlen tettes lőtte szíven, azt követően, hogy császári palotája trónternében a fényt felkattintotta. Tudni kell, hogy a szóban forgó palota pompás termei közötti átjárást nem korlátozzák ajtószárnyak, hogy a belső tér lenyűgöző mélysége mindig akadálytalanul érvényesülhessen. A gyilkos a trónteremmel szomszédos sötét díszteremben rejtőzködött, s onnan küldte golyóját az áldozat szívébe. A rákövetkező napon trónra lépett az iménti párbeszéd egyik szereplője, s a merénylet miatt lemondott belügyminiszter helyét a másik szereplővel töltötte be. Az utódlás kérdésében késedelem nélkül és egyhangú szavazással döntő minisztertanács többi tagjai a helyükön maradtak.

Most már ki is találhatjuk a párbeszéd elejét. A császár azt kívánta, szereljék át palotája elektromos hálózatát úgy, hogy valahányszor valamelyik terem világítását felkapcsolják, egyidejűleg kapcsolódjék fel minden szomszédos sötét terem világítása is. Másrészt, ha egy szomszédos terem világítása működött a kapcsolás

* Ennek az országnak a létezéséről a hazai olvasó Petőfi hasonló című költeményéből értesülhetett.

pillanatában, akkor (a nehéz gazdasági helyzetre való tekintettel, energiatakarékossági okokból) ott kapcsolódjék le a világítás, hiszen ott nem bújhatott el merénylő. Itt a miniszter pontosított:

— Minden terem állapota minden pillanatban vagy *Világos* vagy *Sötét* — kezdte a miniszter — és ez a „vagy" kizáró vagy...

— De okos vagy — morgott a császár. (Ez okatootá nyelven is jól hangzott.)

— Felséged azt kívánja, hogy bármely teremben a kattintás változtassa meg a teremnek és összes szomszédainak az állapotát, terem szomszédján értve minden olyan másik termet, amelybe az adott teremből átjáró nyílik?

— Így legyen — hagyta rá a császár.

Ezen a ponton az éles elméjű miniszter megjegyezte, hogy bár a császári ötlet műszakilag kétségtelenül reális, nem nyilvánvaló, hogy egyidejűleg fényárba lehet majd borítani minden termet. Hiszen amikor sötét teremben kattintunk, a terem történetesen már kivilágított szomszédja elsötétül. Pedig a teljes kivilágításra például trónra lépési évfordulókon nagy szükség lenne... És ekkor úgy folytatódott beszélgetésük, ahogyan az fentebb már meg van írva.

A begyűjtött mérnökök nem boldogultak a miniszter által felvetett problémával, habár a császár gondolatát realizáló kapcsolási ábrát gyorsan elkészítették. Eközben CNN-hír lett belőlük, s a császár, nem akarván kockáztatni az amerikai segélycsomag folyósítását, szabadlábra helyeztette őket. Amikor távoztak, írásba adták, hogy szabad akaratukból vettek részt egy zárthelyi állami projektben. A belügyminiszter az aláírt nyomtatványokat ellenőrizte, s az egyiken furcsa utóiratot talált:

Valakitől azt hallottam, hogy Lovász László magyar matematikus Kombinatorikai problémák és feladatok című könyve foglalkozik a felmerült kérdéssel. Isten óvja császárunkat!

Titokzatos módon az okatootául írt szövegben Lovász könyvének címe pontatlanul ugyan, de magyarul szerepelt. Hogy ennek okára (is) fény derüljön, egy időre magukra hagyjuk hőseinket és egy kis matematikával folytatjuk.

2. Mérő László lámpácskás játéka. Tekintsünk egy irányítatlan gráfot, amelyről a továbbiakban mindig feltesszük, hogy sem hurkot, sem többszörös élet nem tartalmaz. A gráf minden csúcsában elhelyezünk egy áttetsző nyomógombot, amelyben elektromos lámpácska van. Nevezzük a gombot és a benne lévő lámpácskát együtt röviden *lámpának.* Megfelelő kapcsolási tervvel elérhető, hogy bármely lámpát megnyomva, a lámpa állapota és minden, a gráfban vele szomszédos (ti. a csúcsával éllel összekötött csúcsban elhelyezkedő) lámpa állapota megváltozzék: kigyulladjon vagy kialudjék. Ilyen módon egy játékszert kapunk, amellyel érdekes egyszemélyes

— vagyis fejtörő-jellegű — játékot játszhatunk. A játék kezdetén néhány lámpa világít (akár az összes is világíthat). A játék célja gombnyomásokkal kioltani minden lámpát.

Ezt a játékszert a nyolcvanas évek elején nemcsak kitalálta, hanem a valóságban is megalkotta Mérő László (később a „Mindenki másképp egyforma" és más érdekes matematikai-pszichológiai könyvek szerzője), és XL25 néven bemutatta az 1983. évi londoni Nemzetközi Játékvásáron. Ott figyelt fel rá David Singmaster, a Rubik-kocka jeles szakértője és népszerűsítője, és Cubic Circular („Kockakörlevél") című időszaki kiadványa 1985. évi számában részletes ismertetést írt róla. A következő évben Mérő a Középiskolai Matematikai Lapokban magyar nyelven is beszámolt a játékról, amelyet *lámpácskás játéknak* nevezett [7], s ebben a cikkében található a következő gráfelméleti tétel első bizonyítása:

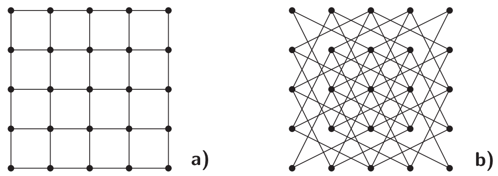
Legyen L irányítatlan gráf. Nevezzük L bármely c csúcsa környezetének a c csúcsból és a vele éllel összekötött csúcsokból álló csúcshalmazt. Létezik L csúcsainak olyan K részhalmaza, hogy L minden csúcsa páratlan számú K-beli csúcs környezetében van.

A tételből következik, hogy ha a vizsgált játék kezdetén minden lámpa világít, alkalmas gombnyomásokkal minden lámpa kioltható. Ha ugyanis a K halmazban lévő csúcsok gombjait nyomjuk meg, akkor L bármely csúcsában az ott lévő lámpa állapota páratlan sokszor változik meg — azaz megváltozik. Ebből az észrevételből azt is leszűrhetjük, hogy adott gombok megnyomása mindig ugyanazoknak a lámpáknak az állapotát változtatja meg, függetlenül a gombnyomások sorrendjétől. Világos továbbá, hogy ugyanazon gomb páros számú lenyomása után egyetlen lámpa állapota sem változik.

Nyilvánvaló, hogy ha a játék kezdetén az összes lámpák sötétek, a K-beli csúcsok gombjait megnyomva minden lámpa kigyullad. Innen következik, hogy a miniszter problémája megoldható: ha a gráf pontjai a palota termei, élei pedig a szomszédos termek közti átjárók, akkor a tétel azt állítja, hogy vannak olyan termek, amelyekben felkattintva a világítást, *minden* terem fénybe borul.

Mérő lámpákkal fogalmazta meg tételét, és ugyanígy tett Lovász az említett könyvben [6], ahol a tétel az 5.17.c. jelű feladat. Lovász könyvének húsz évvel korábban megjelent első angol nyelvű kiadása [5] még nem tartalmazta a feladatot, bár voltak benne a megoldáshoz felhasználható, önmagukban is érdekes gráfelméleti állítások. Mérő után tételét mások is „felfedezték", a kilencvenes években pedig folyóiratokban és matematikai versenyeken nemegyszer kitűzték feladatként. Mérő frappáns elemi bizonyítását itt nem mutatjuk be (megtalálható [2] 5.9. fejezetében); cikkünk következő részében lineáris algebrai bizonyítást adunk tételére.

Az XL25 akkortájt született, amikor a ZX81, a személyi számítógépek legendás előfutára, melybe egyetlen kilobájt RAM-ot rakott Sir Clive Sinclair (ezért a kis gépért kapott lovagi címet), de BASIC nyelven programozható volt, s kis memória-bővítés után elfogadhatóan sakkozott. Mérő gépében egy kilobájt ROM volt, s tulajdonosai az 1. ábrán látható két gráf bármelyikén játszhatták a lámpácskás játékot (az 1.b. gráf két pontja pontosan akkor van éllel összekötve, ha sakk-lóugrással elérhetők egymásból). Ez indokolta az XL25 elnevezést.



1. ábra

Az XL25 minden bekapcsolás után megadott egy *fénymintát*, azaz kigyujtotta néhány lámpáját, s ezeket kellett a játékosnak gombnyomásokkal kioltani. Látni fogjuk, hogy az 1.a. gráf esetén nem minden fényminta oltható ki. Az XL25 azonban csak megoldható feladatokat tűzött ki.

3. Lineáris algebra a kételemű test felett. Értelmezzük a $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ halmazon az összeadást és szorzást a $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ és $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$ szabályokkal. Ezek láthatóan a modulo 2 maradékosztályok (vagyis a páros számok halmaza és a páratlan számok halmaza) műveleti szabályai. Egyetlen eltérés a közönséges műveletektől: $1 + 1 = 0$; ez a „páratlan meg páratlan az páros" szabály megfelelője. A $\mathbf{2}$ halmazt a bevezetett műveletekkel *kételemű testnek* nevezzük. Ahogyan a valós számtest feletti lineáris algebra (a vektorok, vektorterek, lineáris egyenletrendszerek, stb. elmélete) felépül, ugyanúgy építhetjük fel a lineáris algebrát a kételemű test felett. Azok a valós számtest feletti lineáris algebrai összefüggések, amelyek levezetése közben csak a műveleteknek a test szokásos algebrai definíciójába sűrített tulajdonságait használjuk (mindkét művelet asszociativitása és kommutativitása, a disztributivitás és az inverz műveletek elvégezhetősége), érvényesek a kételemű test feletti lineáris algebrában is. Ilyen összefüggéseket fogunk alkalmazni a lámpácskás játékok vizsgálata során.

Tekintsünk egy lámpácskás játékot, vagyis egy irányítatlan gráfot együtt a csúcsaiba ültetett nyomógombos lámpákkal. A gráfról csak azt kötjük ki, hogy véges számú csúcsa van. Jelölje ezeket $1, 2, \ldots, n$; ennek megfelelően fogunk beszélni az i gombról (vagy lámpáról). Minden i-re ($1 \leq i \leq n$) tekintsük azt a $\mathbf{2}$ feletti n-dimenziós γ_i vektort (más szóval nullákból és egyesekből álló n elemű sorozatot), amelynek j-edik komponense akkor és csak akkor 1, ha az i gombot megnyomva a j lámpa állapota megváltozik. Azt a $G = (g_{ij})$ $n \times n$ típusú (másképpen: *n rendű*) mátrixot, amelynek sorai $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, a tekintett *játék mátrixának* nevezzük. A lámpácskás játék szabálya szerint ez a mátrix mindig szimmetrikus (tehát i-edik oszlopa is a γ_i vektor), és a főátlója csupa egyesekből áll.

A fénymintákat ugyancsak megadhatjuk **2** feletti n-dimenziós $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ vektorral: minden k-ra ($1 \le k \le n$) legyen $f_k = 1$ pontosan akkor, ha a tekintett fénymintában a k lámpa világít. Az ω zérusvektor azt a fénymintát jelenti, amelyben minden lámpa sötét, a csupa egyesekből álló ε pedig azt, amelyben minden lámpa világít. Alapvető megfigyelés: ha adott a φ fényminta és megnyomjuk az i gombot, akkor a $\varphi + \gamma_i$ fénymintát kapjuk.

Mint minden játékban, a lámpácskás játékokban is valamilyen stratégiát követünk. A *stratégia* ebben az esetben csak azt jelenti, hogy eldöntjük, mely gombokat fogjuk megnyomni (hiszen már tudjuk, hogy ezeket elég egyszer megnyomni, s a sorrend sem számít). Bármely stratégia megadható azzal a **2** feletti n-dimenziós $\sigma = (s_1, \dots, s_n)$ vektorral, amelyben $s_k = 1$ akkor és csak akkor, ha a stratégia végrehajtása közben a k gombot (is) megnyomjuk. Másik alapvető megfigyelés: ha a G mátrixú játék indulásakor a fényminta φ, és a σ stratégiát alkalmazzuk, akkor a $\varphi + \sigma \cdot G$ fénymintát kapjuk (itt a szorzásjel mátrixszorzást jelent); ha, speciálisan, $\varphi = \omega$, akkor a $\sigma \cdot G$ fénymintát. Ezért Mérő tétele a következő lineáris algebrai állítást jelenti:

Tetszőleges **2** *feletti szimmetrikus és főátlójában csupa egyeseket tartalmazó n rendű G mátrixhoz létezik olyan* **2** *feletti n-dimenziós σ vektor, hogy $\sigma \cdot G = \varepsilon$.*

Ez másképpen is fogalmazható: létezik megoldása minden olyan n egyenletből álló n ismeretlenes **2** feletti lineáris egyenletrendszernek, amelynek mátrixa szimmetrikus, főátlójában csupa egyesek állnak, s a jobboldalán álló konstansok is mind egyesek. (A valós számtest feletti lineáris egyenletrendszerekre ez nem igaz; könnyű ellenpéldát találni.)

A bizonyításhoz felidézünk néhány lineáris algebrai fogalmat és összefüggést. A **2** feletti $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ és $\beta = (b_1, \dots, b_n)$ vektorok *skalárszorzatán* az $\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ szorzatot értjük, ahol a műveleteket **2**-ben végezzük; így a skalárszorzat értéke 0 vagy 1. Mint a „közönséges” lineáris algebrában, most is ezt a skalárszorzást használjuk mátrixok szorzásánál. Ha $\alpha \cdot \beta = 0$, azt mondjuk, hogy a két vektor *merőleges* egymásra (más szóval ortogonális). A merőlegesség **2** feletti vektoroknál egyszerűen azt jelenti, hogy páros számú olyan „hely” van, amelyen mindkét vektorban egyes áll.

A **2** feletti összes n-dimenziós vektor *vektorteret* alkot: halmazukból nem vezet ki sem az összeadás, sem a kivonás (ami az $1 + 1 = 0$ szabály miatt ugyanaz, mint az összeadás), sem a skalárokkal (0-val és 1-gyel) való szorzás. E vektortér *alterének* nevezzük minden olyan nemüres részhalmazát, amely maga is vektortér, s ehhez elég, ha nem vezet ki belőle az összeadás. Alteret alkotnak például az összes olyan (két- vagy többtagú) összegek, amelyeket vektorok tetszőleges H halmazából képezhetünk; ezt az alteret $[H]$ jelöli. Mindazok a vektorok, amelyek egy V altér minden vektorára merőlegesek, maguk is alteret alkotnak; ennek jele $V^{\perp}$. Bármely U, V alterekre nyilvánvaló $U \subseteq V \Longrightarrow V^{\perp} \subseteq U^{\perp}$. Az ellenkező irányú implikáció kevésbé nyilvánvaló, de az is igaz — következik a $V^{\perp\perp} = V$ összefüggésből, ami ugyanúgy igazolható, mint a valós számtest feletti lineáris algebrában (jóllehet a kételemű test feletti merőlegességnek vannak szokatlan tulajdonságai, pl. nemzérus vektor is lehet merőleges önmagára).

Mérő tételének bizonyításához először gondoljuk meg, hogy minden **2** feletti n-dimenziós σ-val képezve az összes $\sigma \cdot G$ vektorokat, éppen a $[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ alteret kapjuk, ahol $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ a G mátrixot alkotó vektorok. Továbbá, $[\varepsilon] = \{\varepsilon, \omega\}$, tehát a tétel azt állítja, hogy $[\varepsilon] \subseteq [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$. Mint láttuk, ez ekvivalens a $[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^{\perp} \subseteq [\varepsilon]^{\perp}$ tartalmazással. Ezt fogjuk belátni. Vegyük észre, hogy $[\varepsilon]^{\perp}$ pontosan azokból a vektorokból áll, amelyekben az 1 komponensek száma páros.

Legyen $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]^{\perp}$. Akkor $\alpha \cdot G = \omega$, ahonnan, minden i-re $g_{i1}, \ldots, g_{in}$-nel jelölve G i-edik oszlopának (és sorának!) komponenseit, kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i g_{ij} a_j = (\alpha \cdot G) \cdot \alpha = \omega \cdot \alpha = 0.$$

Mivel G szimmetrikus, $i \neq j$ esetén az $a_i g_{ij} a_j$ és $a_j g_{ji} a_i$ tagok kiesnek (megint az $1 + 1 = 0$ szabály!), másrészt minden i-re $g_{ii} = 1$, ezért a bal oldal $a_1^2 + \cdots + a_n^2$, ami **2**-ben ugyanaz, mint $a_1 + \cdots + a_n$. Ez az összeg 0, tehát α-ban az 1 komponensek száma páros, tehát $\alpha \in [\varepsilon]^{\perp}$, és ezt kellett megmutatnunk.

Ez a bizonyítás Lossers holland matematikus gondolatmenetét követi [4]. A tételre lineáris algebrai bizonyítást először Sutner adott [8], ezért olykor Sutner tételeként említik.

4. A történet folytatása. A belügyminiszter villámgyorsan intézkedett. Okulva a CNN-afféron, ez alkalommal rövid katonai továbbképzésre hívatta be

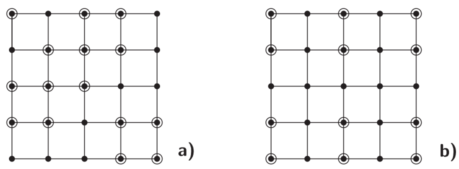
(1) az egyetlen, magyar egyetemet végzett állampolgárt (ilyen minden országban akad),
(2) a helyi műszaki egyetem matematika tanszékének összes oktatóját, valamint
(3) a villanyszerelő szakszervezet teljes tagságát, 9 szakembert.

Amikor a szirénázó rendőrautók mind a tíz személyt beszállították a BM pincéjében berendezett barátságos társalgóba, a miniszter azonnal megkezdte az eligazítást. Az akció teljes sikerrel zárult: három nap múltán miniszterünk büszkén állhatott gazdája elé:

— Kérem Felségedet, szemlélje meg a palota új világítási rendszerét!
Eközben a társaival együtt aznap reggel leszerelt matematikus, név szerint Tavoli Kartar Sunk (ejtsd: távoli kartársunk) két puszi közben borúlátóan súgta hitvese és hajdani évfolyamtársa, Farkasházi Fruzsina fülébe:

— Azért a tartalék fogkefém maradjon készenlétben...

Újból magukra hagyjuk Okatootáia lakóit, de annyit még elmondunk, hogy a császári palota 25 teremből áll, és a gráfja történetesen azonos az XL25 játék 1.a. ábrán látható gráfjával (terem = csúcs, átjáró = él). Az előző fejezetben látottak szerint matematikusunknak egy 25 ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kellett megoldania ahhoz, hogy megmondja, mely termekben kell a fényt felkattintani az összes termek kivilágításához. Egy kicsit dolgoznia kellett tehát, szerencséjére csak a kételemű testben. Ettől a munkától megkíméljük az olvasót. A 2.a. ábra mutatja a megoldást: a bekarikázott gombokat megnyomva minden lámpa világítani fog. (Ellenőrizzük!)



2. ábra

Mitől aggódott hát T. K. S.? Erre válaszol a 2.b. ábra: ha az *azon* megjelölt gombokat nyomjuk meg, semmi sem történik, vagyis minden lámpa sötét marad. Ugyanaz történik tehát, mintha egyetlen gombot sem nyomtunk volna meg. Ha figyelembe vesszük, hogy 2^{25} különböző fényminta van és ugyanannyi különböző stratégia, a skatulya-elvből következik, hogy létezik olyan fényminta, amelyet ω-ból indulva nem lehet megvalósítani. Keressünk ilyen fénymintát! Ebből a célból jelölje G *most* az XL25 játék 25 rendű mátrixát, $\sigma = (s_1, \ldots, s_{25})$ pedig a 2.b. ábra — mint stratégia — vektorát (a gombokat az $1, \ldots, 25$ számokkal megszámoztuk, mondjuk, a bal felső sarokból kezdve és soronként haladva). Akkor $\sigma \cdot G = \omega$. Legyen a φ fényminta megvalósítható; ez azt jelenti, hogy van olyan $\tau = (t_1, \ldots, t_n)$ stratégia, amelyre $\tau \cdot G = \varphi$. Innen következik

$$\varphi \cdot \sigma = (\tau \cdot G) \cdot \sigma = (\sigma \cdot G) \cdot \tau = \omega \cdot \tau = 0.$$

(A második egyenlőség azért teljesül, mert G szimmetrikus: $s_i t_j$ együtthatója a baloldalán g_{ij}, míg a jobboldalán g_{ji}.) Nyertük, hogy φ merőleges σ-ra, vagyis az $1, \ldots, 25$ számok között páros számú olyan k van, amelyre $f_k = s_k = 1$. Tehát minden olyan fényminta, amelyben a 2.b. ábrán megjelölt csúcsok közül páratlan számú világít, megvalósíthatatlan.

Szerencsére a császárnak eszébe sem jutott, hogy — például — egyedül a palota egyik sarkában levő tróntermet világíttassa ki. Mint látjuk, ez nem oldható meg. A következő évben az uralkodó úgy döntött, hogy a dübörgő okatootá gazdaság eredményeiből (melyek egy svájci bankban várták további sorsukat) az eddiginél nagyobb császári palotát építtet, s a régit a legelszántabb híveit egyesítő Szövetség és Körök céljaira ajánlja fel. A nagyratörő és generózus tervet a sajtó népszerűsítette, így a történetünkben már szerephez jutott matematikusnak is tudomására jutott. Aggodalma újraéledt, s hosszas tépelődés után bebillentyűzte a miniszter titkárságának számát. Meglepetésére a mobilon félpercen belül felharsant Assassin katonás hangja:

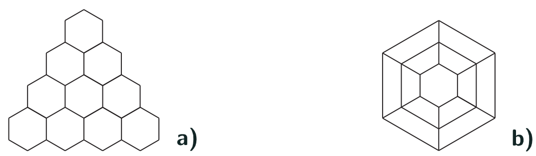
— Üdv, tanárom! Ördöge van, éppen most küldtem magáért! Ne izguljon, fogkefét ne hozzon! Megint komoly feladatot kap!

Az oldott légkörű beszélgetés során kiderült, hogy a császár kívánságára az új palota gráfja 8×8-as négyzetrács lesz, a világítás rendszere ugyanolyan biztonságos, mint az eddig használt palotában, s a miniszter a még nagyobb biztonság érdekében szeretne egy olyan táblázatot, amely termek bármely T halmazához megadja, mely termekben kell a fényt felkattintani ahhoz, hogy a végén pontosan a T halmazhoz tartozó termekben legyen világosság. E kívánság a következő párbeszédet generálta:

— A régi palotához? — nyögte sápadtan Kartar Sunk.

— Ne legyen buta, tanárom! Kit érdekel az már? Természetesen az újhoz!

— Főnök, akkor nagy kő esett le a szívemről. Most már be merem vallani, hogy a feladat a régi palota esetén matematikailag megoldhatatlan. Ám az újra vonatkozóan megoldható. Igaz, hogy az utóbbi viszont fizikailag lehetetlen — pontosan annyira, mint a sakkjáték feltalálójának kívánsága —, de az nem gond. Mindjárt telepítek a palmtopjára egy programot, amely ugyanazt tudja, mint a kívánt táblázat.



3. ábra

Ebben maradtak. Mint utolsó mondatából kiderül, hősünk időközben eredményesen töprengett a nyugtalanító problémán. Gondolatait a következő fejezetben adjuk közre. Előbb azonban oldjunk meg két pihentető feladatot: ha egy újabb palota *alaprajzát* (nem a gráfját!) a 3.a. vagy a 3.b. ábra mutatja,

a) hogyan kattintható fel a fény az összes termekben,

b) felkattintható-e csupán a középső teremben?

5. Lámpácskás játék négyzetrácson. Jelöljük továbbra is G-vel az XL25 játék mátrixát — azét, amelyet az 1.a. ábra mutatta gráfon játszunk. Részletesen: $G =$

$$\begin{pmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

Az algebrai alapismeretek közé tartozik, hogy a G mátrixú lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor lesz a jobboldali konstansok *bármely* $(f_1, \ldots, f_{25})$ rendszerére megoldható (kevésbé algebrai fogalmazásban: a régi császári palota termeinek *bármely* halmaza akkor és csak akkor lesz kivilágítható), ha $|G|$ — a G mátrix determinánsa — nem zérus. Kiszámítása a sok 0 ellenére is kellemetlen feladatnak tűnik, de megkönnyíti a következő tény, amelyre Zádori László hívta fel figyelmünket, s amely a [3] algebrai feladatgyűjteményben 537. sorszámmal és bizonyítással szerepel.

Legyen az mn rendű G négyzetes mátrix felbontható n^2 számú blokkra, amelyek m rendű négyzetes mátrixok, s jelölje ezeket G_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$. Tegyük fel, hogy ezek a blokkok mint mátrixok páronként felcserélhetők (azaz $G_{ij} \cdot G_{kl} = G_{kl} \cdot G_{ij}$ minden i, j, k, l-re). Annak a $\mathbf{G}$ n rendű mátrixnak, amelynek elemei ezek a blokkok, a szokásos módon kiszámíthatjuk a determinánsát, amely ugyancsak egy m rendű négyzetes mátrix; jelölje ezt Γ. Akkor $|G| = |\Gamma|$.

Látható, hogy fentebbi G mátrixunk felbomlik ilyen módon. Esetében $m = n = 5$, és

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} A & E & O & O & O \\ E & A & E & O & O \\ O & E & A & E & O \\ O & O & E & A & E \\ O & O & O & E & A \end{pmatrix}, \quad \text{ahol} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

E egységmátrix, O zérusmátrix. A, E és O páronként felcserélhetők, alkalmazhatjuk tehát az említett tényt: elegendő a $\mathbf{G}$ mátrix determinánsát kiszámítanunk; ez a determináns egy 5 rendű mátrix lesz, és annak a determinánsa egyenlő G-ével.

Ezzel az eljárással bármely n^2 csúcsú négyzetrács-gráfra eldönthetjük, hogy zérus-e a rajta játszott lámpácskás játék mátrixának determinánsa, amiből, mint láttuk, kiderül, kiolható-e bármely fényminta az adott játékban. Ehhez a

$$\mathbf{G_{n,n}} = \begin{pmatrix} A_n & E & O & \ldots & O & O & O \\ E & A_n & E & \ldots & O & O & O \\ O & E & A_n & \ldots & O & O & O \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ O & O & O & \ldots & A_n & E & O \\ O & O & O & \ldots & E & A_n & E \\ O & O & O & \ldots & O & E & A_n \end{pmatrix}, \qquad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

n rendű mátrixokra lehet és kell ugyanazt a meggondolást elvégeznünk. Itt $\mathbf{G_{n,n}}$ első indexe azt jelzi, hogy blokkokból álló n rendű mátrixról van szó, a második pedig azt, hogy maguk a blokkok n rendűek. Kifejtve $\mathbf{G_{n,n}}$-t az első sora szerint, nyerjük: $|\mathbf{G_{n,n}}| = A_n \cdot |\mathbf{G_{n-1,n}}| + |\mathbf{G_{n-2,n}}|$. Ez a rekurzív képlet, együtt a $|\mathbf{G_{1,n}}| = A_n$, $|\mathbf{G_{2,n}}| = A_n^2 + E$ kezdeti értékekkel, biztosítja, hogy az n^2 rendű $|\mathbf{G_{n,n}}|$ mátrix determinánsának értékét az n rendű A_n mátrix néhány hatványából képezett összegmátrix determinánsaként számíthassuk ki. Az A_n mátrix éppen az n

csúcsú lánc-gráfon ($\bullet\!-\!\bullet- \cdots -\bullet\!-\!\bullet$) játszható lámpácskás játék mátrixa, a négyzetrácsgráfon játszható lámpácskás játék vizsgálatát tehát egyszerűbb lámpácskás játék vizsgálatára vezettük vissza. A történetünkben szerepelt példák:

$$|G_{5,5}| = ||\mathbf{G_{5,5}}|| = |A_5^5 + A_5| = \begin{vmatrix} 0&1&1&0&1\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 1&0&1&1&0 \end{vmatrix} = 0$$

(mert a páratlan sorszámú sorok összege zérusvektor), és

$$|G_{8,8}| = ||\mathbf{G_{8,8}}|| = |A_8^8 + A_8^6 + A_8^4 + E| = \begin{vmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{vmatrix} = 1.$$

Megfigyelésünket így is megfogalmazhatjuk: bármely n-re $|G_{n,n}|$ egyenlő egy olyan mátrix determinánsával, amelyet úgy kapunk, hogy alkalmas, **2** fölötti $f_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ polinomba az A_n mátrixot helyettesítjük (a_0 ($= a_0 x^0$) helyébe az E vagy O mátrixot írjuk, aszerint, hogy a_0 1 vagy 0.) Meghatározzuk az f_n polinomokat. Ebből a célból a látott rekurzív képlet segítségével táblázatba foglaljuk f_n együtthatóit $n = 1, \ldots, 8$-ra:

n	a_8	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1								1	0
2							1	0	1
3						1	0	0	0
4					1	0	1	0	1
5				1	0	0	0	1	0
6			1	0	1	0	0	0	1
7		1	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	1	0	1	0	0	0	1

Vegyük észre, hogy a táblázat délkeleti irányú, nem azonosan 0 „átlói” (11, 101, 1111, stb.) éppen a *modulo* 2 *Pascal-háromszög* sorai, amelyeket a közönséges

Pascal-háromszögnél megszokott módon írunk fel, de az összeadásra a **2**-ben érvényes $1+1=0$ szabályt használjuk:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 0 & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \end{array}$$

és így tovább. A modulo 2 Pascal háromszög elemeit $\binom{n}{k}_2$ fogja jelölni; $\binom{n}{k}_2$ akkor és csak akkor 0, ha $\binom{n}{k}$ páros. Észrevételünk alapján azt sejtjük, hogy

$$f_n(x) = \binom{n}{0}_2 x^n + \binom{n-1}{1}_2 x^{n-2} + \binom{n-2}{2}_2 x^{n-4} + \cdots, \tag{1}$$

és ezt n szerinti indukcióval be is láthatjuk. (1) ismeretében Tavoli Kartar Sunk számára nem volt nehéz olyan programot írni, amely bármely nem túl nagy (mondjuk, 10000-nél kisebb) n-re eldönti, megvalósítható-e minden fényminta az $n \times n$ méretű négyzetrácson.

6. Mátrixok helyett polinomok. Barua és Ramakrishnan tovább fejlesztette a négyzetrácson játszható lámpácskás játékok elméletét [1]. Itt bemutatjuk gondolataiknak azt a részét, amely közvetlen folytatása az előző fejezetnek.

Mint láttuk, az $n \times n$-es négyzetrácson játszott lámpácskás játék mátrixa $n^2 \times n^2$ típusú, a fényminták és a stratégiák pedig n^2 dimenziós 0-1-vektorok. Az utóbbiakat természetes módon írhatjuk fel $n \times n$ típusú mátrixként: a φ fényminta mátrix-alakjában az i-edik sor j-edik eleme akkor és csak akkor 1, ha a négyzetrácsunk i-edik sorának j-edik helyén lévő lámpácska világít; hasonlóképpen stratégia mátrix-alakjában a megnyomandó gombok és csak azok helyén áll 1.

Tekintsük az $n \times n$ típusú

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és az előző fejezetben szereplő A_n mátrixokat. Ha az O $(=\omega)$ fénymintára az S mátrixalakú stratégiát alkalmazzuk, a $B_nS + SA_n$ fénymintát kapjuk. (Ezt közvetlenül ellenőrizhetjük egyetlen 1-et tartalmazó S-ekre; tetszőleges S ilyenek összege, s ezután már csak a mátrixszorzás disztributivitását kell használnunk.) A $B_nX + XA_n = O$ mátrixegyenletnek triviálisan megoldása $X = O$ (ha egyetlen gombot sem nyomunk meg, egyetlen lámpa sem gyullad ki). Ha más megoldása nincs, akkor tetszőleges M fénymintára a $B_nX + XA_n = M$ egyenletnek sem lehet egynél több megoldása. Valóban, ha $B_nS_1 + S_1A_n = B_nS_2 + S_2A_n = M$, akkor $B_n(S_1 + S_2) + (S_1 + S_2)A_n = M + M = O$, ahonnan $S_1 + S_2 = O$, és így $S_1 = S_2$. Ezért, ha $B_nX + XA_n$-ben X helyébe a lehetséges 2^{n^2} számú stratégia mindegyikét behelyettesítjük, akkor 2^{n^2} számú különböző fénymintát kapunk, tehát minden lehetséges fénymintát megkapunk. Ha viszont $B_nX + XA_n = O$-nak van másik (nemtriviális) megoldása is, akkor a skatulya-elv szerint van olyan fényminta, amelyet egyetlen stratégia alkalmazásával sem állíthatunk elő (vö. T. K. S. aggodalmával a 4. fejezetben).

Beláttuk, hogy az $n \times n$-es négyzetrácson akkor és csak akkor valósítható meg minden fényminta, ha a $B_nX + XA_n = O$ mátrixegyenletnek csak triviális megoldása van. Erre azonban már régóta ismeretes elegáns szükséges és elegendő feltétel. Sylvester* éppen 125 évvel ezelőtt mutatta meg, hogy tetszőleges azonos típusú A és B négyzetes mátrixokra az $XA = BX$ egyenletnek pontosan akkor van egyetlen megoldása, ha A és B karakterisztikus polinomjai relatív prímek** [9]. A **2** kételemű test feletti mátrixok esetén ez az egyenlet $BX + XA = O$ alakban is felírható.

Emlékeztetünk, hogy a

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja a

$$|C - xE| = \begin{vmatrix} c_{11} - x & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - x & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} - x \end{vmatrix}$$

determináns, amely szemmel láthatóan x-ben n-edfokú polinom; ha C **2** feletti mátrix, akkor persze $|C + xE|$ alakban is felírható. Eszerint B_n és A_n karakterisztikus polinomja megfelelően

* James Joseph Sylvester (1814-1897), többek között a rezultáns és a diszkrimináns fogalmának megalkotója.

** Sylvester tételének bizonyítása valamivel mélyebb lineáris algebrai ismeretek birtokában is hosszadalmas lenne, ezért nem fér bele cikkünkbe.

$$|B_n + xE| = \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}, \quad |A_n + xE| = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x+1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}.$$

Látjuk, hogy A_n karakterisztikus polinomját B_n-éből úgy kapjuk meg, hogy benne x-et $x+1$-gyel helyettesítjük. B_n-ről pedig vegyük észre, hogy $|B_1 + xE| = x$, $|B_2 + xE| = x^2 + 1$, továbbá $|B_n + xE| = x \cdot |B_{n-1} + xE| + |B_{n-2} + xE|$ (a determinánst kifejtve az első sora szerint). Ez ugyanaz a két kezdeti érték és ugyanaz a rekurziós szabály, amelyekkel az előző fejezetben az $f_n(x)$ polinomokat megadtuk. Következőleg minden n-re $|B_n + xE| = f_n(x)$ és $|A_n + xE| = f_n(x+1)$. Érvényes tehát:

Az $n \times n$-es négyzetrácson játszható játékban akkor és csak akkor állítható elő minden fényminta, ha $f_n(x)$ és $f_n(x+1)$ relatív prímek.

Ezáltal a játék megoldhatósága két n-edfokú polinomon végzett euklideszi algoritmussal (azaz legfeljebb n maradékos osztással, n^2-el arányos számú elemi művelettel) dönthető el, vagy ha olyan kedvünk van, két n-edfokú polinom rezultánsának (azaz egyetlen $2n$ rendű determinánsnak) a kiszámításával. Bármelyiknek a számításigénye lényegesen kisebb, mint az előző fejezetben leírt módszeré (az n^3 műveletet igényel). Ráadásul memóriafelhasználás szempontjából is jobb ez utóbbi: itt n-nel, a mátrixoknál pedig n^2-tel arányos mennyiségű memória szükséges.

Irodalom

[1] Barua, R., Ramakrishnan, S., σ-game, σ^+-game and two-dimensional additive cellular automata, Theoretical Computer Science, 154 (1996), 349-366.

[2] Csákány Béla, *Diszkrét matematikai játékok*, 2. kiadás, Polygon, 2005.

[3] Fagyejev, D. K., Szominszkij, I. Sz., *Felsőfokú algebrai feladatok*, Typotex, 2000.

[4] Lossers, O. P., Solution of Problem 10197, American Mathematical Monthly, 100 (1993), 806-807.

[5] Lovász, L., *Combinatorial Problems and Exercises*, Akadémiai Kiadó, 1979.

[6] Lovász László, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex, 1999.

[7] Mérő László, A lámpácskás játékról, Középiskolai Matematikai Lapok, 36 (1986), 145-150.

[8] Sutner, K., Linear Cellular Automata and the Garden-of-Eden, The Mathematical Intelligencer, 11 (1989), 49-53.

[9] Sylvester, J. J., Sur l'équation en matrices $px = xq$, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 99 (1884), 67-71, 115-116.

Csákány Béla, Juhász Rozália, Makay Géza, SZTE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1., csakany@math.u-szeged.hu, makayg@math.u-szeged.hu