A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY

KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL

SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

25. KÖTET

3—4. FÜZET

SZEGED, 1964 DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

Б. ЧАКАНЬ

ОБ АБЕЛЕВЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНЫХ КЛАССОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

ОБ АБЕЛЕВЫХ СВОЙСТВАХ ПРИМИТИВНЫХ КЛАССОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

Б. ЧАКАНЬ (Сегед)*)

В предлагаемой работе приводятся доказательства некоторых утверждений, опубликованных в [7], а также сформулируется несколько замечаний, относящихся к затронутому там же кругу вопросов. Основные определения можно найти в работах [5], [6], на которые мы неоднократно будем ссылаться.

§ 1

Свойство, которым могут обладать примитивные классы алгебр, мы назовем *абелевым*, если оно характеризует среди примитивных классов групп примитивные классы абелевых групп.

Т. Ивэнс доказал абелевость каждого из следующих свойств [8]:

H. *В любой алгебре класса $\mathfrak{A}$ каждая подалгебра является классом некоторой конгруэнции.*

E. *Множество всех эндоморфизмов любой алгебры класса $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно основных операций данного класса* (т. е., если ν — n-местная основная операция в классе $\mathfrak{A}$, A — алгебра в $\mathfrak{A}$, а $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — эндоморфизмы алгебры A, то отображение A в себя $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\nu$, определенное посредством $x(\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\nu) = (x\varepsilon_1) \ldots (x\varepsilon_n)\nu$, $(x \in A)$, также является эндоморфизмом A).

S. *Множество всех подалгебр любой алгебры класса $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно основных операций данного класса* (т. е., если ν — операция, как выше, $A_1, \ldots, A_n$ — подалгебры алгебры A в классе $\mathfrak{A}$, то все элементы вида $a_1 \ldots a_n\nu$ $(a_i \in A_i;\ i=1, \ldots, n)$ образуют подалгебру в A. Для последней мы будем пользоваться естественным обозначением $A_1 \ldots A_n\nu$.)

Далее, рассмотрим свойство (см. [4])

T. *В классе $\mathfrak{A}$ прямое и свободное произведения двух алгебр совпадают.*

Оно также является абелевым, как это легко следует из абелевости свойства H и из теоремы 2 в [6].

В [6] дано описание примитивных классов со свойством H, а также со свойством T, при некоторых дополнительных условиях. Сейчас мы распространим наши исследования и на классы, обладающие свойством E,

*) B. Csákány (Szeged)

соотв. S. Кроме приведенных мы будем рассматривать и следующие свойства примитивных классов:

O. *В классе $\mathfrak{A}$ существует опорная операция* (т. е. нульместная операция, которая отмечает одноэлементную подалгебру во всех алгебрах класса $\mathfrak{A}$).

N. *Класс $\mathfrak{A}$ нормальный* [1] (т. е. в любой алгебре класса $\mathfrak{A}$ все конгруэнции перестановочны между собой).

QR. *В любой алгебре класса $\mathfrak{A}$ каждая конгруэнция однозначно определяется своим классом, содержащим опорный элемент* (т. е. элемент, отмеченный опорной операцией).

P. *В классе $\mathfrak{A}$ существует* (в общем случае главная производная) *операция $xy\psi$, определяющая вид конгруэнций во всех алгебрах класса* $\mathfrak{A}$ [11]. Это значит, что каждая конгруэнция φ произвольной алгебры A класса $\mathfrak{A}$ обладает таким классом N_φ, что $a \equiv b(\varphi)$ $(a, b \in A)$ тогда и только тогда, если $ab\psi \in N_\varphi$.

§ 2

Следуя Б. И. Плоткину [3], m-местную основную операцию μ алгебры A назовем перестановочным с n-местной основной операцией ν той же алгебры, если для любых $a_{ij} \in A$ $(i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, n)$ выполняется равенство $(a_{11} \ldots a_{1n}\nu) \ldots (a_{m1} \ldots a_{mn}\nu)\mu = (a_{11} \ldots a_{m1}\mu) \ldots (a_{1n} \ldots a_{mn}\mu)\nu$. Если любые две основные операции алгебры A перестановочны (не исключая при этом одинаковых операций), то A называется *коммутативной*.

Оказывается, что примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойством E, если каждая алгебра в $\mathfrak{A}$ коммутативна. При доказательстве этого утверждения, обобщающего теорему I из [8], в которой описаны примитивные классы группоидов со свойством E, без существенного видоизменения можно применить метод, использованный в [8], и поэтому мы его проводить не будем. Следует лишь отметить, что понятие коммутативной алгебры является естественным обобщением понятия энтропического группоида.

Далее, имеет место

Теорема 1. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойствамл* O, N, E, *если $\mathfrak{A}$ эквивалентен**) *классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей* R.

Доказательство. Сперва рассмотрим примитивный класс $\mathfrak{A}$ со свойствами O, N, E. Как показано в [1], свойство N влечет за собой существование в $\mathfrak{A}$ трехместной операции μ с тождеством

$$xyy\mu = yyx\mu = x. \tag{1}$$

Обозначим опорный элемент во всех алгебрах класса $\mathfrak{A}$ символом 0. Для операции $x0y\mu$ введем новое обозначение $x+y$. Ввиду (1) в $\mathfrak{A}$ тождест-

*) В [7] речь шла о рациональной эквивалентности в смысле А. И. Мальцева [2], но нетрудно проверить, что она в случае *примитивных* классов равносильна эквивалентности, введенной в [5].

венно имеет место

$$x+0=0+x=x. \tag{2}$$

Далее, пусть μ — произвольная m-местная операция класса $\mathfrak{A}$. Рассмотрим $\mathfrak{A}$-свободную алгебру F со свободными образующими $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$. Согласно замечанию, сделанному в начале параграфа, F — коммутативна. Перестановочность основных операций класса $\mathfrak{A}$ распространяется и на все (главные производные) операции, в чем можно убеиться путем индукции по степени полинома, определяющего операцию, над системой основных операций. Таким образом, операции $+$ и μ — перестановочны в F. В частности, выполняется равенство

$$(x_1+y_1)\ldots(x_m+y_m)\mu = x_1\ldots x_m\mu + y_1\ldots y_m\mu, \tag{3}$$

являющееся одновременно и тождеством в $\mathfrak{A}$. Из тождеств (2), (3) и из наличия свойства N, как в [5], следует, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым (вполне определенным) кольцом с единицей R. Покажем коммутативность кольца R. Если $\bar\varrho, \bar\sigma \in R$, то пусть ϱ, σ — соответствующие им одноместные операции класса $\mathfrak{A}$. Из коммутативности F вытекает $x_1\varrho\sigma = x_1\sigma\varrho$. Тогда по лемме 1 из [5] $x\bar\varrho\bar\sigma = x\bar\sigma\bar\varrho$ является тождеством в $\mathfrak{R}$, так что в самом кольце R будем иметь $1\bar\varrho\bar\sigma = 1\bar\sigma\bar\varrho$ (1 — единица в R), т. е. $\bar\varrho\bar\sigma = \bar\sigma\bar\varrho$.

С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым коммутативным кольцом с единицей R. В силу теоремы 2 из [6], $\mathfrak{A}$ обладает свойствами O, N. Берем в $\mathfrak{A}$ произвольную m-местную операцию μ. Тождественно выполняется

$$x_1\ldots x_m\mu = x_1\mu_1 + \ldots + x_m\mu_m, \tag{4}$$

где $+$ означает операцию, соответствующую сложению класса $\mathfrak{A}$, а μ_i ($i=1, \ldots, m$) суть подходящие одноместные операции (см. стр. 54, а также лемму 1 в [5]). Если теперь σ — одноместная операция в $\mathfrak{A}$, то, пользуясь тождествами (4), (3) (последнее выполняется в $\mathfrak{A}$ в силу леммы 1 из [5]) и перестановочностью одноместных операций в $\mathfrak{A}$, что вытекает из коммутативности R, мы получим тождества

$$(x_1\ldots x_m\mu)\sigma = (x_1\mu_1 + \ldots + x_m\mu_m)\sigma = x_1\mu_1\sigma + \ldots + x_m\mu_m\sigma =$$
$$= x_1\sigma\mu_1 + \ldots + x_m\sigma\mu_m = (x_1\sigma)\ldots(x_m\sigma)\mu.$$

Этим показано, что в алгебрах класса $\mathfrak{A}$ одноместные операции являются эндоморфизмами.

Наконец, пусть ν — n-местная операция, A — произвольная алгебра в $\mathfrak{A}$ и $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — ее эндоморфизмы. Применением только что доказанного, а также тождества (4), получается для любых $a_1, \ldots, a_m \in A$:

$$(a_1\ldots a_m\mu)(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu) = (a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_1\ldots(a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_n\nu =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(a_1\ldots a_m\mu)\varepsilon_j\nu_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\mu_i\varepsilon_j\nu_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\varepsilon_j\nu_j\mu_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_i(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\mu_i = a_1(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\ldots a_m(\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu)\mu.$$

Значит, $\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\nu$ является эндоморфизмом в A, а этим наличие свойства E у примитивного класса $\mathfrak{A}$ установлено.

Перейдем к рассмотрению свойства S. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы примитивный класс $\mathfrak{A}$ обладал свойством S, является существование для всякой пары операций класса $\mathfrak{A}$ μ, ν, m и n-местных соответственно, m-местных операций $\mu_1, \ldots, \mu_n$ с тождеством

$$(x_{11}\ldots x_{1n}\nu)\ldots(x_{m1}\ldots x_{mn}\nu)\mu = (x_{11}\ldots x_{m1}\mu_1)\ldots(x_{1n}\ldots x_{mn}\mu_n)\nu. \tag{5}$$

Это предложение доказывается таким же путем, как теорема IV из [8].

Отсюда следует, что примитивный класс со свойством E обладает и свойством S, ибо в нем ввиду коммутативности всех алгебр выполняется более сильное тождество

$$(x_{11}\ldots x_{1n}\nu)\ldots(x_{m1}\ldots x_{mn}\nu)\mu = (x_{11}\ldots x_{m1}\mu)\ldots(x_{1n}\ldots x_{mn}\mu)\nu.$$

Теорема 2. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойствами* O, N, S, *если $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных модулей над некоторым кольцом с единицей R, все левые идеалы которого являются двусторонними.*

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, получим, что в классе $\mathfrak{A}$ со свойствами O, N, S существует двуместная операция $+$, подчиненная тождеству (2). Если μ — m-местная операция в $\mathfrak{A}$, то на основании (5) в $\mathfrak{A}$ тождественно выполняется

$$(x_1+y_1)\ldots(x_m+y_m)\mu = x_1\ldots x_m\mu_1 + y_1\ldots y_m\mu_2.$$

Подставляя $y_1=\ldots=y_m=0$, получим: $x_1\ldots x_m\mu_1 = x_1\ldots x_m\mu$; аналогичным же путем следует $y_1\ldots y_m\mu_2 = y_1\ldots y_m\mu$. Это показывает, что в $\mathfrak{A}$ имеет место и тождество (3), так что $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R. Ради простоты, мы отождествим одноместные операции класса $\mathfrak{A}$ с элементами R, ссылаясь при этом на лемму 1 из [5]. Пусть теперь F — $\mathfrak{A}$-свободная алгебра со свободным образующим x. Тогда $F=xR$, и ввиду S, для $\sigma\in R$, $xR\sigma$ является подалгеброй в F, значит, для произвольной $\tau\in R$ имеет место включение $xR\sigma\tau \subseteq xR\sigma$, т. е., для любых $\varrho, \sigma, \tau \in R$ существует такое $\tau' \in R$, что

$$x\varrho\sigma\tau = x\tau'\sigma. \tag{6}$$

Поскольку (6) — тождество в $\mathfrak{A}$, в R имеем: $\varrho\sigma\tau = \tau'\sigma$, а это равносильно тому, что в R всякий главный левый идеал является главным идеалом. В силу этого факта, если P — левый идеал в R, то

$$RPR = \bigcup_{p\in P} RpR = \bigcup_{p\in P} Rp = P,$$

т. е. P — идеал кольца R. Этим необходимость условия теоремы доказана.

Для доказательства достаточности предположим, что примитивный класс $\mathfrak{A}$ эквивалентен описанному в теореме классу модулей $\mathfrak{R}$. Берем в $\mathfrak{A}$ m-местную операцию μ, алгебру A и ее подалгебры $A_1, \ldots, A_m$. Требуется доказать, что $M = A_1\ldots A_m\mu$ — подалгебра в A.

Пусть ν — n-местная операция в $\mathfrak{A}$. Рассмотрим элементы $a_{ij}\in A_i$ $(i=1,\dots,m;\ \ j=1,\dots,n)$. Достаточно показать, что $m=(a_{11}\dots a_{m1}\mu)\dots$ $\dots(a_{1n}\dots a_{mn}\mu)\nu\in M$. Двукратным применением тождества (4), выполняющегося и в $\mathfrak{A}$, получим:

$$m=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mu_i\nu_j,$$

где суммирование производится операцией, соответствующей в $\mathfrak{A}$ сложению класса $\mathfrak{R}$, а μ_i,ν_j — подходящие одноместные операции. Этим последним в R соответствуют элементы $\bar{\mu}_i,\bar{\nu}_j$. Предположение относительно R влечет за собой существование в R элементов $\bar{\nu}_{ij}$, для которых имеют место равенства $\bar{\mu}_i\bar{\nu}_j=\bar{\nu}_{ij}\bar{\mu}_i$ $(i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$. По лемме 1 из [5] тогда и в $\mathfrak{A}$ существуют одноместные операции, при которых справедливы тождества $x\mu_i\nu_j=x\nu_{ij}\mu_i$. Отсюда

$$m=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\nu_{ij}\mu_i,$$

а так как здесь

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\nu_{ij}\in A_i,$$

то в самом деле $m\in M$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1 и 2 дают нам возможность определить все минимальные (в другой терминологии: эквационально полные, см. [10]) примитивные классы со свойствами O, N, E, а также со свойствами O, N, S. Ф. Гечег заметил [9], что простые кольца отличаются тем, что классы всех унитарных правых модулей над ними являются минимальными. С другой стороны, Т. Селе указал на возможность охарактеризовать тела, как кольца с нетривиальным умножением и без истинных левых идеалов [12]. При помощи этих замечаний получается следующее предложение:

Минимальный примитивный класс со свойствами O, N, E (O, N, S) эквивалентен классу всех векторных пространств над некоторым полем (телом).

§ 3

Теперь мы будем рассматривать примитивный класс $\mathfrak{A}$ со свойствами O, P. Покажем, что $\mathfrak{A}$ обладает и свойством QR. Пусть A — алгебра из $\mathfrak{A}$, а φ — конгруэнция в A. Тогда $0=00\psi\in N_\varphi$, так что мы должны показать, что N_φ однозначно определяет конгруэнцию φ. В самом деле, если ϑ — отличная от φ конгруэнция в A, то существуют такие элементы $a,b\in A$, что например $a\equiv b(\varphi)$, $a\not\equiv b(\vartheta)$, откуда $ab\psi\in N_\varphi$, $ab\psi\notin N_\vartheta$, так что $N_\varphi\neq N_\vartheta$.

Благодаря только что доказанному, легко получается

Теорема 3. *Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда обладает свойствами* O, P, H (*или* T), *если $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу $\mathfrak{R}$ всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей R.*

Доказательство. Если класс $\mathfrak{A}$ обладает свойствами O, P, H (T), то он является классом со свойствами O, QR, H (T), но тогда в силу теоремы 2 из [6] условие теоремы выполняется. С другой стороны, той же теоремой обеспечено наличие свойств O, H, T у всякого примитивного класса, эквивалентного классу $\mathfrak{R}$. Наконец, такие примитивные классы обладают и свойством P: в качестве операции ψ можно взять операцию, соответствующую модульному вычитанию.

§ 4

Примитивный класс $\mathfrak{A}$ тогда и только обладает свойством O, если в любой алгебре A из $\mathfrak{A}$ среди классов каждой конгруэнции существует единственный класс, являющийся подалгеброй в A. Необходимость этого условия очевидна, а для доказательства достаточности рассмотрим $\mathfrak{A}$-свободную алгебру F со свободными образующими x, y. В алгебре F, а также в ее подалгебрах $\{x\}$, $\{y\}$ существуют однозначно определенные элементы (классы тривиальной конгруэнции) $xy\sigma, x\tau, y\omega$ соотв., являющиеся подалгебрами. Здесь, понятно, σ, τ и ω означают подходящие операции. По условию

$$x\tau=y\omega(=xy\sigma), \tag{7}$$

а поскольку (7) — тождество в $\mathfrak{A}$, мы получим; $x\tau=x\omega$, т. е. операции τ и ω — тождественны, но тогда, как показывает (7), в $\mathfrak{A}$ имеет место и тождество

$$x\omega=y\omega. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $x\omega$ — подалгебра в F, для произвольной операции ϱ класса $\mathfrak{A}$ получим:

$$(x\omega)\dots(x\omega)\varrho=x\omega. \tag{9}$$

Тождества (8) и (9) вместе означают, что ω — опорная операция.

Из доказанного и из теоремы 2 в [6] вытекает

Теорема 4. *Если в каждой алгебре примитивного класса $\mathfrak{A}$ можно взаимно однозначно сопоставлять подалгебры и конгруэнции* (т. е. каждая подалгегра является классом единственной конгруэнции, и среди классов каждой конгруэнции найдется единственная подалгебра), *то $\mathfrak{A}$ эквивалентен классу всех унитарных правых модулей над некоторым кольцом с единицей.*

Литература

[1] А. И. Мальцев, К общей теории алгебраических систем, *Матем. Сборник*, **35** **(77)** (1954), 3—20.
[2] А. И. Мальцев, Структурная характеристика некоторых классов алгебр, *Доклады АН СССР*, **120** (1958), 29—32.
[3] Б. И. Плоткин, Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления, *Доклады АН СССР*, **149** (1963), 1037—1040.
[4] А. А. Терехов, Об алгебрах с совпадающими прямыми и свободными произведениями, *Ученые зап. Ивановского Гос. Пед. Ин-та*, 18 (1958), 61—66.
[5] B. Csákány (Б. Чакань), Об эквивалентности некоторых классов алгебраических систем, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 46—57.

[6] ——— Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 157—164.
[7] ——— Об абелевых свойствах примитивных классов универсальных алгебр, *Успехи Матем. Наук*, **17:6 (108)** (1962), 217.
[8] T. Evans, Properties of algebras almost equivalent to identities, *J. London Math. Soc.*, **37** (1962), 53–59.
[9] F. Gécseg (Ф. Гечег), О примитивных классах полумодулей и модулей, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 165—172.
[10] J. Kalicki–D. Scott, Equational completeness of abstract algebras, *Indag. Math.*, **17** (1955), 650–659.
[11] J. Słominski, On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant element, *Fund. Math.*, **48** (1960), 325–341.
[12] T. Szele, Die Ringe ohne Linksideale, *Buletin Ştiinţific Bucureşti*, **1** (1950), 783–789.

(Поступило 29/VII, 1963 г.)