

CSÁKÁNY BÉLA

*Móra, méhek, matematika*

1996 tavaszának derekán Klukovits Lajos kollégám, aki számos más feladata mellett régóta előadója a matematika történetének a szegedi egyetemen, Utrechtbe indult rövid tanulmányútra. Készülődése során megkérdezte, nem akarnék-e távollétében két óra előadást tartani hallgatói számára kedvem szerinti matematikatörténeti témáról. Eszembe jutott, hogy negyedszázaddal korábban sokat foglalkoztam a méhek lépsejtjeivel, ezekkel a csodálatos geometriai szabályosságot mutató viaszépítményekkel. Erőt vett rajtam a nosztalgia, és vállaltam, hogy előadást tartok a lépsejtek alakjára vonatkozó matematikai gondolatok kétezer éves történetéről. A vállalkozó szellem elnyerte jutalmát. Magam számára is váratlanul így lettem botcsinálta „Móra-kutató”.

I

Az előadásra készülve ugyanis eszembe jutott, hogy sokak között Móra Ferencről is olvastam valahol valamit a méhek házépítő tudományáról. Írása a *Georgikon* című könyvében jelent meg. Lajos felesége, Kati másnapra már elő is kerítette számomra ezt a könyvet az egyetemi könyvtár raktárából. Örömmel vettem kezembe az 1925-ben megjelent takaros könyvecskét, s miután megtaláltam benne a *Méhek* című fejezetet, könyvbaráti élvezettel nézegettem körbe Móra gondolatainak anyagi hordozóját. Gyönyörködés közben meglepő észrevételeket tettem.

A Királyi Magyar Egyetemi Nyomda arannyal nyomott címerét viselő kemény borító belső lapján könyvjegyet látunk EX LIBRIS STEPHANI HORVÁTH IUN. felirattal, Haranghy aláírással, valamely keleti színház tragikus jelenetét ábrázoló grafikával. Sejtettem, hogy a könyv valaha ifjabb Horváth István, az Ady téri egyetemi épület falán márványtáblával is megörökített emlékü rendező és diákszínész tulajdona volt. A belső címlapon finom tollal, apró betűvel író kéz ajánlása:

B117214  
**GEORGIKON**

**ÍRTA MÓRA FERENC**  
**KIRÁLYI MAGYAR EGYETEMI NYOMDA**  
**VIII, MÚZEUM-KÖRÚT 6. SZ. GÓLYAVÁR**

sejtek esetében az új vegy-  
mesterek elhelyezése

Kis papírtörzsek  
úgy kerülnek

1925. Készítette: Horváth István  
Móra Ferenc, miután az új-  
korban

*Legkedvesebb könyvét  
szeretettel ajánlja  
Kis pajtásának  
öreg barátja,  
Fercsike,  
a Daru utcából és a 83. oldalról  
1932. fecskeváló hónap,  
mert ez szebb, mint az: ősz-elő*

A 83. lapon pedig maga Fercsike, azaz Móra Ferenc látható, amint álmában Prométás királlyal beszélget a mennyországban.

Első naiv gondolatom, hogy Móra a gyerek Horváth Istvánnak dedikálta a *Georgikon* kezembe került példányát. Lapozzunk tovább! Ugyanaz a kéz magyarázó szavakat írt a rajzokhoz:

- 39. l. *helyszíni rajz*
- 43. l. *szobám*
- 59. l. *ilyenforma voltam*
- 77. l. *Anyám arcképe után. Jó.*
- 81. l. *Az apám képe után. A fej jó. Az a szép csizma kitalálás.*

Írhatott egy 53 éves „bácsi” ilyen szövegeket egy 11 éves kisfiú számára? Kételyemmel Móra monográfusához, Péter Lászlóhoz fordultam. Azonnal fölismerte az író kezevonását, s az ajánlás címzettjére vonatkozóan is volt magyarázata: egy akkor 30 éves hölgynek írta a sorokat az 53 éves férfi. „Kis pajtása” nem más, mint Kalmár Ilona, az *Aranykoporsó* műzsája, Titanilla modellje, akivel az író 1932 júniusában ismerkedett meg, s aki az ezt követő néhány hónapra elvarázsolta az ősz szívet. A szépséges Ilona azonban még abban az évben idősb Horváth Istvánné lett, s ezáltal a későbbi ex libris-tulajdonos kisfiú mostohaanyukája. Ő adta nevelt gyermekének Móra Ferenc könyvét. Fiának, majd férjének tragikus halála után még több mint négy évtizeden át őrizte könyveiket, s amikor 1986-ban ő is eltávozott, a szegedi egyetem könyvtárára hagyta. A könyvtár állományába „Horváth István-hagyaték” néven kerültek.

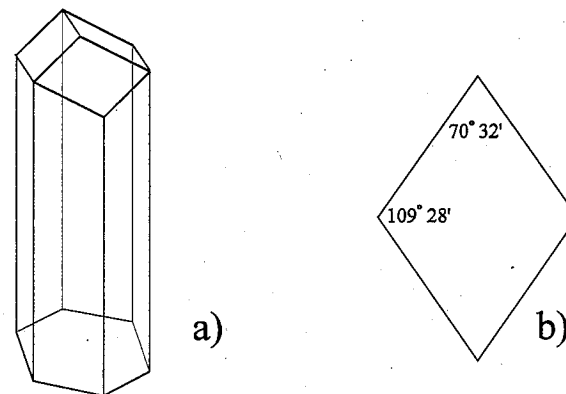
Eddig a történet egyetlen szereplője Móra. De mi is a kapcsolata a méhekkal, és hol bújik elő a matematika? Az író mindkét kérdésre egy mondatban maga válaszol: „Az én szememben [...] az a legnagyobb bűne a méhecskének, hogy nincs a teremtésben több olyan matematikus, mint ő.” Majd így folytatja: „Ezt egy nagyon érdekes történettel tudom bizonyítani [...] A tényre és a nevekre emlékszem, legföljebb a számok nem egészen vágnak.”

2

A történettel, amelyet Móra elmesél, két másik helyen is találkoztam. 1926-ban jelent meg szerzői kiadásban a budapesti egyetemi templom hitszónokának, a jótollú Tóth Tihamérnak színes hitbuzgalmi könyve, *A vallásos ifjú*. Katolikus gimnázium diákjaként ebben olvastam 1944-ben *A méhecske tudománya* című fejezetet. Tóth Tihamér becsületére válik, hogy könyvében a számok is *vágnak*, eltérően H. Á. *A matematikus méhecske* című írásától. Ő a Népszabadság 1981. február 22-i számában, a gyermekrovatban, a történet előadása során ugyanazokat a minden jó számtanos gyermeket elborzasztó számokat írja le, mint Móra Ferenc, ráadásul előzetes mentegetőzés nélkül. Ám, hogy H. Á.-hoz is legyen egy jó szavam, megemlítem, hogy a történet főszereplőjének nevééről egyedül ő nem felejt le az ékezetet. Ezzel el is búcsúzom a *történet* szótól, s a következőkben *legendát* írok helyette, mivel akár-milyen szép is, de nem *tény*.

Méhész barátunk segítségével vagy akár lépesmész fogyasztása közben megfigyelhetjük a lép csodálatra méltó szabályosságát: megegyező alakú és méretű hatszögletű hasábokból áll. Ezeket a kis mézesbödönöket nevezzük lépsejteknak, röviden *sejteknak*. Falaik egyenletes papírvékonyaságú viaszlemezek. Egyetlen sejt, ha kiragadnánk környezetéből, rövid ceruzavégre emlékeztetne. A sejtek két rétegben helyezkednek el, s az egyik rétegben levő sejtek zárólapjaikkal, közérthetőbben a fenekükkel illeszkednek a másik rétegben levőkhöz. A sejtfenék azonban nem egyetlen hatszög alakú lap, ahogyan természetesnek tarthatnánk, hanem három egyforma rombusz alkotja. Ne úgy képzeljük el tehát a lépsejtet, mint egy keresztben átvágott ceruzacsonkot, hanem mint olyan ceruzavéget, amelyet három erőteljes nyísszan-

tással kicsit meghegyeztünk. Az *1.a. ábrán* nyílásával lefelé fordítva látjuk.



1. ábra

A Móra Ferenc és mások által különböző, de hasonló változatokban megírt legenda lényege a következő. A 18. század első felének jeles francia tudósa, René Antoine Ferchault de Réaumur (1683–1757), akinek kezdőbetűjével öreg hőmérőkön ma is találkozunk, pályadíjat tűzetest ki a következő matematikai feladat megoldójának:

„Milyen nagyoknak kell lenniük a lépsejt fenekét alkotó rombuszok szögeinek ahhoz, hogy a méhek a legkevesebb viaszból építhessék fel a lépet?”

A nyertes pályamunka szerint a keresett szögek: 109 fok 26 perc és 70 fok 34 perc. A mérések viszont azt mutatták, hogy a rombuszok szögei a valóságban 109 fok 28 perc és 70 fok 32 perc. (Ezt az alakot az *1.b. ábra* mutatja.) Már ez is csodálatos egyezés, de a java csak most jön! Sziklának ütközött, és elsüllyedt egy hajó. A kapitány a hajónaplóval igazolta, hogy a hajót a szabályok szerint irányította, s helyzetét eközben logaritmuskönyvet használva állapította meg. Tüzetesen megvizsgálták a logaritmuskönyvet, s rájöttek, hogy egy adat hibás volt

benne — ez okozta a hajótörést. Nosza, kijavították a bűnös adatot, és a most már hibátlan könyv segítségével újraszámolták a lépsejt rombuszainak legkedvezőbb szögét. Az új és végleges számítási eredmény: 109 fok 28 perc és 70 fok 32 perc! Eddig a legenda. A három szerző befejezésül megjegyzi:

*kiderült, hogy a méheknek van igazuk (M. F.);  
nem a méh hibázott, hanem a sok számtantudós (T. T.);  
a méhecske matematikatudománya hibátlan (H. Á.).*

Honnan tudjuk, hogy a legenda nem lehet tény? Az ördög egy pici — mindössze kétperces — részletben rejtőzik. A lépsejt fenekén látható rombuszok szögeit nemhogy a 18. század elején, de napjainkban sem lehet két szögperc pontossággal mérni, mert a puha viaszból álló lapok határa nem tökéletesen egyenes. Még nagyobb bökkenő, hogy az aprócska rombuszok csak látszólag egyformák. Valójában a különböző lépsejtek rombuszlapjainak szögei között több foknyi eltérés van: a nagyobbik szög *átlagos értéke* 20. századi mérések szerint 107 fok, a kisebbiké ennek megfelelően 73 fok. Hogy elképzeljük a két szögpercnyi szöget: az óra percmutatója egyharmad másodperc (!) alatt fordul el ennyivel.

Természetesen, ez a legenda is valóságos elemekre épül. Réaumur fiatalabb kortársa, a csillagász Giacomo Domenico Maraldi (1709–1788), akinek a nevéhez többek között a hang sebességének a meghatározása fűződik, a párizsi csillagvizsgáló melletti kertben figyelte a méheket, s följegyezte, hogy a sejtjeik mélyén látható rombuszok szögeit körülbelül 110, illetve 70 fokosnak találta. Maraldi kitűnő matematikus is volt, és maga elé a következő feladatot tűzte: „Milyen nagyoknak kell lenniük a lépsejt fenekét alkotó rombuszok szögeinek ahhoz, hogy a lépsejt bármely két szomszédos lapja ugyanakkora szöget zárjon be egymással?” Az ilyen alakú lépsejt bizonyos értelemben a legszabályosabb. Maraldi bebizonyította, hogy ebben a keresett szögek: 109 fok 28 perc és 70 fok 32 perc. Az erről szóló híradást olvasván, Réaumur az a gondolata támadt, hogy a méheket talán nem annyira a szabályosság, mint inkább a gazdaságosság vezérli, s ekkor fogalmazta meg a legendás feladatot. Ám nem pályatételként, hanem Samuel Koenig svájci matematikust kérte a

megoldásra. Egy számtanpélda megoldását nem nehéz elrontani: Koenig 2 négyzetgyökének hibás értékével számolt, így kapta a pontatlan szögadatokat. Néhány évvel később Colin Maclaurin (1698–1746) is megoldotta Réaumur feladatát, ő már helyesen. Ezáltal az derült ki, hogy *a lépsejtalak akkor a leggazdaságosabb, amikor a legszabályosabb*. Nem a méhek okosabbak hát „a sok számtantudósnál”, hanem Maclaurin volt nagyobb számtantudós, mint Koenig. Ezt azonban a számtantanárjelöltek már elsőéves korukban megtanulják.

Gondolhatjuk: mégis meghökkentő, hogy a méhek, ha kis pontatlansággal is, mégiscsak a legtokéletesebb alakúra csinálják sejtjeiket. Sajnálatos módon ez sem igaz. A rombuszok alakját ugyan nem lehet tovább javítani, de Fejes Tóth László (\*1915), a geometria legnagyobb élő magyar tudósa, 1964-ben megmutatta, hogy ha a lépsejt fenekét három rombusz helyett megfelelő alakú két hatszög és két rombusz alkotná, további viaszmegetakarítás lenne elérhető. E jegyzet írója — sas szárnyáról följebb röppenő verébként — 1971-ben tette közzé azt az észrevételét, hogy Fejes Tóth konstrukciója elemi matematikai analízis segítségével még egy picit tökéletesíthető. Máig sem tudjuk, lehetséges-e további javítás. Az azonban bizonyos, hogy a méhek nem az elméletileg leggazdaságosabb alakú lépsejteket építik.

A legendát, amennyire az tudható, Henry Peter Lord Brougham (1778–1868) angol államférfi — egy időben lordpecsétőr és számos tudományt népszerűsítő cikk szerzője — terjesztette el a múlt század első felében, jöllehet a tényeket már a 18. század végén írásban is összefoglalta Rogerius Josephus Bosković (1711–1787), a Rómában élő tudós horvát jezsuita. Jó tudnunk, hogy Móra Ferenc a *Méhek*-ben nem tudományos ismereteket terjesztett, csupán egy tudománytörténeti érdekességű *kitalálást* adott tovább. Ám eközben olyan elbűvölően határolta el magát a matematikától, hogy már csak ezért is érdemes elolvasni írását:

„senki sem csodálkozhat rajta, hogy én a méheket nem szeretem [...] a nyolccal és kilenccel való szorzások [...] számítási tudásom határait már lényegesen meghaladják. Rám nézve ezen a tájon már a felsőbb matematika kezdődik”;

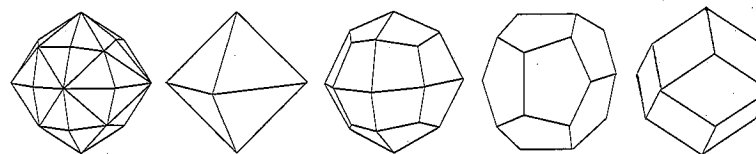
„ha én méh vagyok, olyan kalamajkát csinállok a fokok és percek elszámításával, hogy megrendülnek bele Méhország húszmillió éves támaszai és talpkövei.”

Jogos! — mondhatnánk a manapság divatos szóval, hiszen a 7 fok 45 perces meg a 109 fok 40 perces szögek (ezeket írja Móra) összegének kétszerese sehogyan sem adja ki a 360 fokot, márpedig legalábbis Euklidész óta egyetlen négyszög — akár rombusz, akár nem — szögeinek összege sem lehet más.

3

A *Méhek* Móra Ferencnek nem az egyetlen matematikai írása. Általán ismert — és közismert — másik ilyen opusza ugyancsak létező geometriai idomról, a *tetrakontaoktaéderről* szól. Ezt az „állatot” négy változatban is megírta, utoljára a Világ 1922. karácsonyi számában. Péter László a *Tetrakontaoktaéderek*-kel kapcsolatban Móra „politikát, érzelmet és humort elegyítő írásművészetét” emeli ki. Én csupán a kristályalakot szeretném bemutatni a nyájas olvasónak, föltételezve, hogy a tantervek szeszélye folytán annakidején nem tanulta, vagy nem ezen a néven tanulta. Az íróhoz hasonlóan jómagam is kisdíák koromban, 1945 őszén találkoztam vele, amikor a háború után a papírgyár még nem küldött kartonpapírt a boltokba. Ezért kedves ásványtantanárom, Polónyi Tivadar, nem is készíttette el velünk a kristályformákat. Ő azonban *hexakiszoktaédernek* nevezte az inkriminált idomot (amelyből mi, rossz gyerekek, azonnal hekszakiszoptaédert csináltunk), de így nevezi Koch Sándor, Sztrókay Kálmán és Grasselly Gyula professzorok nagy *Ásványtan* (1966) könyve is. Csak öreg fejjel tudtam meg Gévy Gábor kollégámtól, a kristálytan szakértőjétől, hogy a kettő — ugyanaz. Pedig rájöhettem volna, hiszen hatszor nyolc az negyvennyolc (ezt szélső függetlenségi atya gyermekeként még Móra Ferenc is bizonyára tudta!), ezért *hexakiszokta* görögül ugyanazt a számot jelenti, mint *tetrakontaokta*.

34



2. ábra

A 2. ábrán balról első a tetrakontaoktaéder. Nagyon gyűlölhette az író, hogy ezt a szép idomot szét tudta taposni! Ugyanezen az ábrán sorakoznak a szöbanforgó tárcában emlegetett, Móraék kemencenyakán mereszkedő többi testek: az oktaéder, az ikozitetraéder és a pentagondodekaéder, nemigen használt magyar nevükön a nyolcas, a huszonnégyes és az ötszögötizenkettes. Az utóbbinak azért ilyen hosszú a neve, hogy a rombtizenkettestől (gyakoribb nevén rombdodekaédertől) megkülönböztessük. Ez is ott van a 2. ábra jobb szélén, és nem ok nélkül. Mint neve is mutatja, neki tizenkét rombuszlapja van. Mindegyikük olyan alakú, mint a lépcsajt fenekének a rombuszai, s ezenfölül — ami ebből egy kis mértani okoskodással ki is következtethető — ugyanolyan szögben is csatlakoznak egymáshoz. Ezt az érdekességet több mint egy évszázaddal Réaumur, Maraldi és Maclaurin előtt Johannes Kepler (1571–1630) vette észre, akit csillagászként tisztelünk, de elméleti matematikusnak is zseniális volt. Mi több, Kepler arra is magyarázatot próbált adni, miért építik a méhek sejtjeiket a megcsodált szép alakúra, s ezt a magyarázatot 1928-ban kísérletekkel és megfigyelésekkel igazolta Victor Willem belga tudós. Erről azonban már egy másik jegyzetet lehetne írni.

4

A Móra család kemencéjén ott díszelgett a hexaéder is. Ezzel lehetett a legkevesebb gondja Fercsikének, mert ennek a köznapi neve kocka. Az olvasó iránti megbecsülésem jeléül ez kimaradt a 2. ábrából. Hanem az még kíváncsok belőlem, hogy a számok a tetrakontaoktaéderrel kapcsolatban sem egészen vágnak. „A negyvennyolc lapú, a hetven élű,

35

a huszonhat sarkú állat” — írja Móra a „rettenetes” kristályalacról. Leonhard Eulertól (1707–1783) tudjuk azonban, hogy bármilyen kristály csúcsai és lapjai számának összege kettővel nagyobb, mint az éleinek a száma. Ez a törvény nem teljesülne a 26, 48 és 70 számokra: 26+48 nem egyenlő 70+2-vel. A tetrakontaoktaédernek hetvenkét éle van, ahogyan ezt kis türelemmel és gondolkozással az ábráról is megállapíthatjuk. Móra mentségére szolgáljon, hogy olyan alacról van szó, amelyet szakembernek sem nehéz eltéveszteni. Az említett ásványtankönyvet a legjobb hazai tudósok írták, s a negyvennyolcast (véletlenül ez is a 83. lapon van, mint Fercsike) mégis negyvennégyesnek ábrázolták.

Ha valakinek nem erőssége a matematika, az nem érdem, de nem is szégyen. Móra Ferencet nem ezért szeretjük. Ha valaki ezt a kis gyöngeségét olyan derűsen vallja meg, mint ő, ezzel a szigorú matematikus számára is szeretetreméltóvá válik.

## 5

Az író műveiben jártas olvasó, érezvén, hogy a befejezésnél tartunk, megkérdezheti: „És a herepfedény hol marad?” A herepfedény ezúttal elmarad. Annyit tudok erről a derék apokrif mértani idomról, amennyit szülőapja, Móra Ferenc leírt róla\*. Abban pedig sem méhekről, sem matematikáról nem esik szó. Mégis elárulom az olvasónak, hogy a herepfedényt épp annyira tisztetem, mint a *kiszera méra bávatagot*. Számomra aránypárba állítható az a jelenség, hogy magyar és orosz tudós egymástól függetlenül ugyanakkor fedezte föl az abszolút geometriát, azzal a nem kevésbé meglepő ténnyel, hogy nádtetős meg nagyvárósi házban született két magyar remekíró, Móra és Karinthy egy idő tájt találta ki a *halandzsát*.

\* Mind a három Móra-írás megtalálható az író műveinek *A világ így megyen* című válogatásában (Szépirodalmi Könyvkiadó, 1956.).

## KRIER RUDOLF

### Családom históriája

Nyugdíjas korom óta megpróbáltam őseim nyomába eredni; megtudni valamit azokról, akik életüket egy kalandokkal teli próbálkozásra tették föl: új hazát keresni és találni a megszokott addigi helyett. Mindig is hagyomány volt nálunk, hogy őseink a Délvidék teljes felszabadítása után a kulturált nyugatról vándoroltak be és telepedtek le az egykor virágzó életet hordozó, de a török uralom alatt teljesen lerongyosodott vidéken.

Nagyapám mint kilencedik gyermek a családban Gyertyámoson született, de az ő nagyapja is már 1785-ben Zombolyáról mint a bevándorló család első sarja bátyjával települt át Gyertyámosra.

Levelező kapcsolatba kerültem Alfred Louis úrral, ny. állomásfőnök, amatőr öskutatóval. 1966 nyarán Szegedre jött. Együtt utaztunk át Temesvárra. Nekem ott még rokonságom van, ő pedig a Romániából visszatelepültek megbízásából „kirándult” kutatás végett oda. Elsősorban arra voltam kíváncsi, hogy családom francia vagy német eredetű-e? Tőle kaptam a fölvilágosítást, hogy ennek a névnek a németben és a franciában is van megfelelője. A név eredetileg a németben *Krieger*, a franciában *Guerrier*; mindkettő *harcost* jelent. Változataik: a németben *Krier*, *Crier*, *Creer*, *Keer*; a franciában *La Guerre*, *Laguerre*, *Lager*, *Legär*.

1944 augusztusában a szegedi tüzérsztyállal vonultam ki a frontra összekötőtiszt beosztásban. Német parancsnokságoknál is kellett jelentkeznem; ott nevemet sajátos hangzással ejtették ki. Nyomatékkal ejtették az *i*-t, és gyöngé *e*-vel. Ezt ezzel az írásmóddal szeretném szemléltetni: *Kri<sup>e</sup>r*.

Családom megjelenése e hazában összefügg a Kárpát-medence történelmi eseményeivel, elsősorban Budavár visszavételével és a török-hódoltság fölszámolásával.