JÁTÉKOK ÉS KOORDINÁTÁK

1. **Koordináták.** A *koordináták* fogalmával való első ismerkedésnél síkbeli pont koordinátáira gondolunk, azaz olyan számpárra, amely kijelöli a tekintett pont helyét a síkon. Már az antik görögök összekapcsolták a geometriát (mértant) az aritmetikával (számtannal): a számokat egyenes szakaszok mértékének tekintették. Azt is felfedezték, hogy nem minden szakasz hosszúságát lehet „észszerűen" kifejezni számmal, s ez az irracionális szám fogalmának a kialakulásához vezetett. Az analitikus geometriát azonban csak Galilei nagy hatású felhívása után („amit mérni lehet, azt mérjük meg, amit pedig nem lehet mérni, azt tegyük mérhetővé") kezdték kidolgozni, elsősorban Descartes és Fermat. Módszerük jelentősége abban áll, hogy a pontokat számpárokkal (vagy — a térben — számhármasokkal) ábrázolva a geometriai alakzatok egyenletekkel írhatók le. Például az origó körüli egységsugarú kör mindazon (x, y) koordinátákkal megadott pontok mértani helye, amely koordinátákra $x^2 + y^2 = 1$, másképpen, amely koordináták az $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ kétváltozós függvény zérushelyei.

Mivel az emberiség az utóbbi évszázadokban egyre bonyolultabb jelenségeket ismert meg, köztük olyanokat, amelyeket a közönséges valós számokkal már nem lehetett leírni, szükségessé vált a számfogalom bővítése, majd újabb — számoknak nem nevezhető — matematikai fogalmak bevezetése (pl. mátrixok, végtelen dimenziós vektorok), amelyek ugyancsak használhatók (általánosabb értelemben vett) koordinátákként, és rájuk vonatkozó alkalmas egyenletekkel leírhatók a természetben vagy laboratóriumban (újabban már a társadalomban is) megfigyelt folyamatok.

2. **Diszkrét játékok.** Játékon ebben az előadásban két küzdő fél (két személy vagy két csapat) rögzített szabályok szerinti, célirányos tevékenységét értjük — a cél a nyerés, vagy az ellenfél nyerésének elkerülése. A cél elérésekor a játék befejeződik; ekkor azt mondjuk, hogy a játékosok lejátszottak egy játszmát. Egyes játékok játszmái állások sorozatából állnak, a játékosok felváltva lépnek a szabályok által megengedett módon egyik állásból másik állásba, s a játszmák ezen állások sorozatát feljegyezve bármikor újra lejátszhatók. Az ilyen játékokat nevezzük *diszkrét játékoknak.* Tipikus diszkrét játék a sakk. Diszkrét játékok a kártyajátékok is, továbbá a malom, a go, meg az egyes tanórák unalmát hatékonyan enyhítő amőba. A futball nem diszkrét játék, hiszen az állások sorozata (0:0, 1:0, 1:1, ...) nem sokat árul el a meccsről, s annak finomságai — ellentétben a sakkal — nem élvezhetők újra az állások sorozatát újból végignézve. Diszkrét játékok szabályai rendszerint biztosítják, hogy minden játszma véges számú lépésben végetérjen. Egyes diszkrét játékokban minden játékos ismeri a pillanatnyi állást (a kártyajátékoknál, meg a tengeri csata néven ismert diszkrét játéknál nem ez a helyzet) és a lépéseit maga határozza meg (a szabályok nem írnak elő kockadobást, amely kivenné a játékos kezéből a döntést). Az ilyen játékot *kombinatorikai játéknak* nevezzük. Minden játék tanulmányozható matematikai eszközökkel, bár ilyen vizsgálatuk nem mindig gyümölcsöző. A kombinatorikai játékok többnyire jól elemezhetők algebrai, kombinatorikai és logikai úton. Ennek megfelelően számítógépes vizsgálatuk is eredményes, különösen a sakké, de a go, a dáma, a malom és az amőba játékoké is.

3. **Koordinátázás.** Ha reményt látunk arra, hogy egy bizonyos fajta feladat matematikai úton megoldható, akkor rendszerint *számolásra* vagy *logikai következtetésre* gondolunk. Valójában a második lehetőség is számolást jelent, csak éppen nem számokkal, alapműveletekkel és szokásos függvényekkel, hanem az „igaz" és „hamis" logikai értékekkel,

valamint az „és", „vagy", „ha..., akkor..." logikai függvényekkel történő számolást. Ahhoz, hogy a feladattípus számításra alkalmassá váljon, először *koordinátázásra* van szükség: a feladatban szereplő fogalmakhoz koordinátákat (számokat, vagy logikai értékeket, vagy mátrixokat, stb.) kell rendelnünk, s a feladatban megadott összefüggéseket felhasználva olyan matematikai eljárást kell megadnunk, amelynek eredménye — ami maga is szám, vagy logikai érték, stb. — megadja, vagy valamilyen módon kifejezi az eredeti feladat megoldását. Példa: ha az általános feladat a többismeretlenes elsőfokú egyenletrendszer megoldása, akkor a feladatban szerepelnek az „i-edik ismeretlen", a „j-edik egyenlet", a „szabad tag" fogalmak, amelyeknek minden konkrét egyenlet megoldása során konkrét számértékeket adunk, s a matematikai eljárás egy algoritmus (mely szerencsés esetben a Cramer-szabályhoz vezethet, de állhat egyszerűen a Gauss-féle kiküszöbölésből is), eredménye pedig egy vagy több szám-n-es (ugyancsak szerencsés esetben). Mint látjuk, algebrai feladat esetén a koordinátázás egyszerűen konkrétizálást jelent; ha azonban a feladat pl. kör és egyenes metszéspontjának meghatározása, akkor a konkrétizálás (ti. a kör és egyenes kijelölése — papíron vagy építési területen) megelőzheti a koordinátázást, ami itt a kör középpontja és egy tetszőleges pontja, meg az egyenes két különböző pontja Descartes-féle koordinátáinak megadását — vagy kimérését — jelenti.

4. **Diszkrét játék koordinátázása.** A koordinátázás egyszerű feladatok megoldása esetén maga is egyszerű: akkor is koordinátázást végzünk, ha a jószágot karámba hajtva az egyes marhákhoz az egymás utáni természetes számokat rendeljük (ez a koordinátázás a *számlálás*, eredménye a marhák száma — szebben mondva, a csorda számossága). Ha a feladat bonyolult, a koordinátázás is. Legyen a feladat olyan sakkprogram megalkotása, amely minden élőlényt képes megverni. A koordinátázás: minden sakkálláshoz számok egy véges sorozatát kell rendelni, amely leírja a bábok helyzetét a táblán, s emellett információt ad minden olyan körülményről, amely a sakkszabályok értelmében lényeges lehet (lépett-e a király, történt-e gyalogátváltozás, stb.). Ehhez a legelső lépés magának a sakktáblának a koordinátázása (a1-től h8-ig), ami egy másik, könnyebb feladat — a sakkjátszmák feljegyzése — megoldását azonnal lehetővé teszi. Az állások koordinátázása után lehet kidolgozni a programot — ez a munka fél évszázada folyik, és a sakknak és a számítástudománynak egyaránt hasznos.

Egyszerű diszkrét játék koordinátázása könnyebb lehet, s a koordinátákkal is könnyebb lehet számolni. Tekintsük például azt a *nim* nevű régi játékot, amelyet három csomó kaviccsal (urbánus környezetben gyufával) játszanak: a játékosok felváltva vesznek el kavicsokat, mindig csak egy csomóból, akár az összest is, de legalább egyet, s az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ennek az állásait nemnegatív egész számokból álló számhármasokkal jelölhetjük, s a szabályokat könnyű átültetni a számhármasok nyelvére. A nim játékhoz már száz évvel ezelőtt találtak olyan egyszerű algoritmust (azaz programot), amely (legalábbis kis kavicscsomók esetén) fejben is elvégezhető, s alkalmazója számára biztosítja a nyerést. (A legutóbbi állítást a figyelmes olvasó megkérdőjelezheti; valójában a nyerő algoritmus nem lehet *minden állásból* alkalmazható, hiszen akkor ezt az algoritmust a kezdő és a másik játékos is használhatná ugyanabban a játszmában, s így mindkettő megnyerné a játszmát, ami képtelenség.)

A továbbiakban

— körülhatároljuk játékok egy családját, amelyekre a koordinátázás módszerével (legalábbis elvben, de sok esetben a gyakorlatban is) meg lehet adni olyan játékmódot („stratégiát"), amelynek alkalmazása nyerést biztosít, s meg is adjuk ezt a játékmódot;

— bemutatunk egy olyan fejtörőt (mondhatnánk, egyszemélyes játékot), amellyel kapcsolatban sok megoldandó probléma tűzhető ki, s a fejtörő táblájának alkalmas (nemtriviális) koordinátázása lehetővé teszi, hogy a megoldhatatlan problémákat minden próbálkozás nélkül kiszűrjük.

5. **Kavicsos játékok.** Legyen n természetes szám. Tekintsünk n csomó kavicsot (az üres csomót sem zárjuk ki). Legyen adott szabályoknak egy akármilyen bonyolult, de egyértelműen megfogalmazott rendszere, amely bármely $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nemnegatív egész számok esetére megmondja, hogy amennyiben az első csomó k_1, a második k_2 kavicsot tartalmaz, és így tovább, melyik csomóból mennyi kavicsot szabad egyidejűleg elvenni (pl. $n = 2$, és az első csomóból csak páros számút — tehát esetleg egyet sem—, a másodikból pedig páratlan számút, de legfeljebb hetet szabad elvenni). A szabályoknak biztosítaniuk kell, hogy csomók tetszőleges rendszeréből mindig lehessen legalább egy kavicsot elvenni. A játékosok e szabályok szerint felváltva lépnek, azaz vesznek el kavicsokat („passzolni" nem lehet), s az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Bármely kavicsos játékot természetesen a az egyes csomókban lévő kavicsok számából képezett szám-n-esekkel koordinátázhatunk (s ezután a kavicsokat el is felejthetjük). Jó lenne az összes állások, vagyis az összes nemnegatív-szám-n-esek halmazát két osztályra, A_1-re és A_2-re bontani úgy, hogy

— A_1-beli állásból, ha egyáltalán lehet lépni, csak A_2-beli állásba lehet lépni;

— A_2-beli állásból *mindig* lehet A_1-beli állásba lépni.

Ekkor ugyanis, *ha a kezdőállás A_2-ben van*, a kezdő játékos A_1-be(li állásba) léphet, ahonnan ellenfele mindig kénytelen A_2-be lépni, és így tovább, s mivel a $(0, \ldots, 0)$ végállás csak A_1-ben lehet, a kezdő játékos nyer. Ha van ilyen felbontás, akkor az A_1 halmazt *a nyerő állások halmazának* nevezhetjük, mert az a játékos, aki A_1-beli állásba léphet, az előbbi meggondolás szerint biztosan megnyeri a játszmát.

6. **Sprague–Grundy-függvény.** Az 1930-as években Sprague német, majd Grundy angol matematikusok (egymástól függetlenül) bebizonyították, hogy *minden K kavicsos játékhoz megadható olyan γ_K n-változós függvény a nemnegatív egészek halmazán* (amely tehát a K játék minden állásához egy nemnegatív egész számot rendel), *hogy γ_K zérushelyeinek a halmaza éppen K nyerő állásainak a halmaza.* Ez a tétel bizonyítja kavicsos játékokra az állások halmazának kívánt felbontási lehetőségét, s így a nyerő állások halmazának létezését. Az utóbbi halmazt ugyanolyan szellemben jellemzi, mint az analitikus geometriában egy kúpszeletet leíró függvény annak a kúpszeletnek a pontjait. Valami olyat csináltak tehát a diszkrét játékokkal Sprague és Grundy, mint Descartes, amikor síkbeli alakzatok kétváltozós függvényekkel való leírhatóságát felfedezte.

Megemlítendő, hogy a Sprague–Grundy-tétel általánosabb feltevések mellett is érvényes, továbbá szerzői egy, a később róluk elnevezett Sprague–Grundy-függvény kiszámítását megkönnyítő másik állítással is kiegészítették. Egy K kavicsos játék szabályainak ismeretében egyébként γ_K rekurzív módon elvi nehézség nélkül kiszámítható: $\gamma_K(0, \ldots, 0) = 0$, mert a végállás nyerő állás; s ha már ismerjük γ_K értékeit mindazokon a szám-n-eseken, amelyek valamely $(a_1, \ldots, a_n)$ állásból egyetlen szabályszerű lépéssel megkaphatók, és ezek az értékek $b_1, \ldots, b_k$ (csak véges sok lehet!), akkor

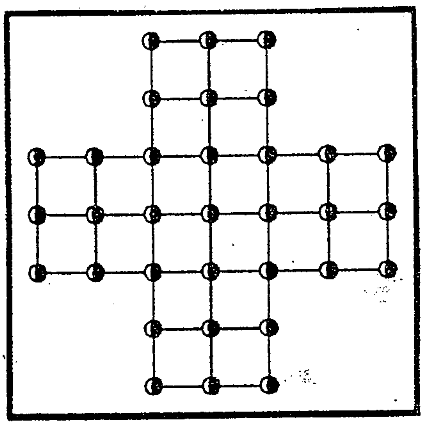
$$\gamma_K(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{mex}(b_1, \ldots, b_k),$$

ahol a jobboldal azt a legkisebb nemnegatív egészt jelöli, amely nem fordul elő $b_1, \ldots, b_k$ között. Az effajta számolást manapság természetesen számítógépre bízzuk. Mintának azonban kiszámítjuk egy ősi kínai kétcsomós kavicsos játék Sprague–Grundy-függvényét néhány kis számpárra. A játék neve a kínaiak által használt angol átírásban *zhan shi zi*, fonetikusan kb. csensidzi. Szokásosabb neve *Wythoff-nim*, mert ennek a nimhez hasonló játéknak az összes nyerő állásait először Wythoff számította ki a múlt század elején. A játék szabálya: vagy egyik csomóból veszünk el, akármennyit, de legalább egyet, vagy mindkét csomóból egyszerre ugyanannyit, de legalább egyet-egyet. Mivel a Sprague–Grundy-függvény (ebben az esetben kétváltozós) művelet a nemnegatív egészeken, művelettáblázat-alakban írjuk fel:

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	0	4
2	2	0	1	5
3	3	4	5	6

Innen látjuk, hogy $(0,0)$ mellett $(1,2)$ (és persze $(2,1)$) is nyerő állás. Tovább folytatva a táblázat felírását, újabb nyerő állásokat kapnánk: $(3,5)$, $(4,7)$, $(6,10)$, stb. Meg lehet sejteni (és be lehet bizonyítani, de az már nem fér ide), hogy a soron következő nyerő állás első koordinátája mindig a már szerepelt koordináták mex függvénye, második és első koordinátájának különbsége pedig mindig eggyel nő.

7. **Szeges szoliter — megoldhatatlan feladatok.** A szeges szolitert a bal oldali ábrán mutatott 33 lyukú táblán játsszuk. A lyukakba szegeket tűzhetünk, s a lépés abban áll, hogy egy szeggel a vízszintesen vagy függőlegesen szomszédos lyukban lévő szeget átugorva a következő *üres* lyukba tűzzük, miközben az átugrott szeget levesszük a tábláról. A játékot ketten is játszhatják (az veszít, aki nem tud lépni), de egyedül is játszható: ilyenkor az alapfeladat az, hogy egy kivételével minden lyukba tűzünk szeget, s egy kivételével az összes szeget le kell venni. Ha azt is előírjuk, hogy a megmaradt szeg melyik lyukban legyen, az így előálló nehezebb feladat nem mindig oldható meg. Ennek igazolásához koordinátázzuk a lyukakat a jobb oldali ábrán látható számpárokkal, s minden álláshoz (azaz betűzött szegek minden halmazához) rendeljünk egy $(e_0, e_1, e_2, m_0, m_1, m_2)$ számhatost, ahol pl. e_2 azt mondja meg, hány betűzött szegnek 2 az első koordinátája. Figyeljük meg, hogy minden lépés az álláshoz rendelt hatos mindegyik komponensét eggyel változtatja meg, s a játszma sikeres lejátszásához 31 lépés kell. Innen következik [!], hogy a megmaradó egyetlen szeg koordinátája ugyanaz lesz, mint a játszma elején az üres helyé.



		12	20	01		
		00	11	22		
02	10	21	02	10	21	02
20	01	12	20	01	12	20
11	22	00	11	22	00	11
		21	02	10		
		12	20	01		