AUTOMATÁK

54. Automaták és félcsoportok

Automatának nevezzük a csupa egyváltozós műveletekkel rendelkező algebrai struktúrát. Legyen $(A;X)$ automata (X jelöli az A -n értelmezett egyváltozós műveletek halmazát). A elemeit az $(A;X)$ automata állapotainak, X elemeit pedig A bemenő jeleinek nevezzük. Mivel az egyváltozós műveletek egyszerűen A -nak önmagába való leképezései, azért $a\in A$ -n az $x\in X$ műveletet elvégezve (másképpen: az a állapotban az x bemenő jelet alkalmazva), a kapott állapotot ax -szel jelöljük. Használhatjuk a következő beszédmódot is: automatánk az a állapotból az x bemenő jel hatására az ax állapotba megy át. Ez a beszédmód rávilágít az "automata" elnevezés eredetére: a gyakorlatban az olyan berendezést nevezzük automatának, mely bizonyos "bemenő jelek" (pl. gombnyomás, irányitókarok beállitása) hatására "állapotát" (pl. alkatrészei kölcsönös helyzetét) meghatározott módon változtatja, s igy minden bemenő jele lehetséges állapotai halmazának egy önmagába való leképezését adja meg.

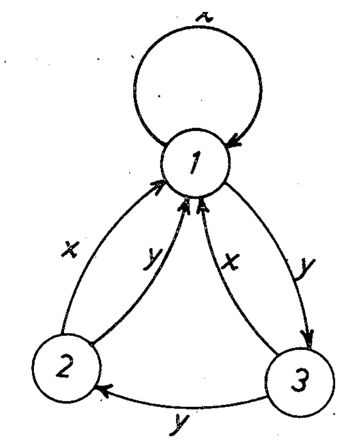
Az $(A;X)$ automata összes műveletei leirhatók egyetlen $\delta: A\times X\to A$ leképezés segitségével, amelyet a $\delta((a,x))=ax$ egyenlőség definiál. Ezt a leképezést $(A;X)$ átmenetfüggvényének nevezzük. A δ átmenetfüggvényü $(A;X)$ automatát a továbbiakban (A,X,δ) alakban fogjuk felirni.

A véges automaták megadhatók az átmenetfüggvény táblázatával (hasonlóan a műveletek művelettáblázattal való megadásához), de jól áttekinthető módon ábrázolhatók gráfok segitségével is. Legyenek C,D idegen véges halmazok, legyen továbbá φ C-nek D^2-be való leképezése. A $G=(C,D,\varphi)$ hármast gráfnak (vagy irányitott gráfnak), C elemeit e gráf éleinek, D elemeit pedig csucsainak nevezzük; ha továbbá $c\in C$, $d_1,d_2\in D$ és $c\varphi=(d_1,d_2)$, akkor d_1-et és d_2-t megfelelően a c él kezdőpontjának, ill. végpontjának nevezzük (vagy azt mondjuk, hogy a c él d_1-ből d_2-be vezet).

Az (A,X,δ) automatát olyan gráffal ábrázolhatjuk, amelyben a csucsok halmaza A, az élek halmaza $A\times X$, továbbá az (a,x) él kezdőpontja a, végpontja ax. (A csucsokat köröcskékkel, az éleket a kezdőpontból a végpontba vezető nyillal szemléltethetjük, s az áttekinthetőség érdekében az (a,x) élet az x jellel jelöljük meg, továbbá a közös kezdő- és

végpontu $(a,x_1),\dots,(a,x_k)$ éleket egyetlen nyillal szemléltetjük, amelyet az $x_1,\dots,x_k$ elemekkel jelölünk meg.)

Itt $\langle 1,2,3\rangle$ az állapotok, $\langle x,y\rangle$ a bemenő jelek halmaza. A műveletek elvégzésének szabálya az ábráról leolvasható.



Legyen (A,X,δ) tetszőleges automata és vegyük az $F(X)$ szabad monoidnak valamely p elemét (p-t bemenő szónak nevezzük). Bármely $a\in A$ -ra definiáljuk ap -t (másképpen $\delta(a,p)$) a következő módon: ha $p=e$, $ap=a$; ha pedig $p=x_1\dots x_{n-1}x_n$, akkor $ap=(ax_1\dots x_{n-1})\cdot x_n$. A szavak hosszusága szerinti indukció mutatja, hogy ezáltal ap-t bármely $p\in F(X)$ -re egyértelműen meghatároztuk.

Legyen most (A,X,δ) olyan automata, melyet valamely a_0 eleme generál. Vezessünk be $F(X)$ -en egy α relációt; legyen $p\alpha q$, akkor és csak akkor, ha $a_0p=a_0q$. Észrevesszük, hogy α ekvivalencia; továbbá $p\alpha q$ esetén bármely $x\in X$ -re $(px)\alpha(qx)$ is teljesül. Valóban, $a_0(px)=(a_0p)x=(a_0q)x=a_0(qx)$. $F(X)$ -nek az utóbbi tulajdonsággal is rendelkező ekvivalenciáit jobbkongruenciáknak nevezzük; speciálisan az α relációt pedig A -hoz tartozó jobbkongruenciának.

Tekintsük az $(F(X)/\alpha, X, \bar\delta)$ automatát, melynek állapothalmaza tehát az α jobbkongruenciához tartozó osztályok halmaza, átmenetfüggvényét pedig a következő módon definiáljuk: ha $\bar p\in F(X)/\alpha$, akkor legyen $\bar\delta(\bar p,x)=\bar p x=\overline{px}$. A definició korrekt: ha p helyett $\bar p$ -nek egy másik elemét választjuk, $\overline{px}$-ként ugyanazt az osztályt kapjuk, mivel α jobbkongruencia. Hasonló módon természetesen $F(X)$ bármely jobbkongruenciájából kiindulva definiálhatnánk automatát, s az igy keletkező automaták bármelyikét egyetlen eleme - ti. az e-t tartalmazó osztály - generálja.

Megmutatjuk, hogy (A,X,δ) izomorf $(F(X)/\alpha,X,\bar\delta)$ -sal. Mivel a_0 generálja (A,X,δ) -t, bármely $a\in A$ -hoz van olyan $p\in F(X)$ hogy $a_0p=a$. Feleltessük meg a-nak $F(X)/\alpha$ p-t tartalmazó osztályát. Ez a megfeleltetés A -nak $F(X)/\alpha$ -ra való leképezése, amely kölcsönösen egyértelmü is, hiszen ha $a\neq b$, akkor φ -nek különböző osztályaiba tartozó szavak hatására megy át (A,X,δ) az a_0 állapotból az a-ba ill. a b-be. Végül leképezésünk felcserélhető a műveletekkel, ami az $ax=(a_0p)x=a_0(px)$ egyenlőségből és $\bar\delta$ definiciójából következik.

Látjuk tehát, hogy az egy elem által generált automaták - izomorfiától eltekintve - nem mások, mint a szabad monoidok jobbkongruenciáiból az előzőekben látott módon megszerkesztett automaták. Ez a tény az egy elem által generált automaták reprezentációtételének tekinthető.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy vizsgált automatáink véges számu bemenő jellel rendelkeznek. Ha emellett az állapotok száma is véges, az automatát véges automatának nevezzük. Egy elem által generált automata akkor és csak akkor véges, ha a hozzátartozó jobbkongruencia véges indexü (azaz véges számu osztálya van).

Tekintsük az (A, X, δ) véges automatát (most nem tesszük fel, hogy egyetlen eleme generálja). Az $F(X)$ szabad monoidon bevezetünk egy β relációt: legyen $p \beta q$ ha bármely $a \in A$ -ra $ap = aq$. Ez a reláció tehát az (A, X, δ) összes, egy elem által generált részautomatáihoz tartozó α relációk közös része. Mint definiciójából látszik, β ekvivalenciareláció; sőt, kongruencia is, mert, ha $p_1 \beta p_2$ és $q_1 \beta q_2$ akkor bármely $a \in A$ -ra $a(p_1 q_1) = (ap_1)q_1 = (ap_2)q_1 = (ap_2)q_2 = a(p_2 q_2)$, tehát $(p_1 q_1) \beta (p_2 q_2)$. Létezik tehát az $F(X)/\beta$ faktorfélcsoport.

Tekintsük másrészt azt a transzformációfélcsoportot, melyet az A állapothalmaz összes $a \to \delta(a, x)$ $(x \in X)$ alaku transzformációi generálnak (A összes transzformációinak félcsoportjában). Ezt az (A, X, δ) automata félcsoportjának nevezzük; jelöljük $S(A, X, \delta)$ -val. Megmutatjuk, hogy $S(A, X, \delta) \cong F(X)/\beta$. $S(A, X, \delta)$ minden φ eleme előáll véges számu $a \to \delta(a, x)$ $(= ax)$ alaku transzformáció szorzataként, azaz $\varphi : a \to ax_1 \dots x_n$ $(x_i \in X)$ alakban. Rendeljük φ -hez $F(X)/\beta$ $\overline{x_1 \dots x_n}$ elemét. Igazoljuk, hogy ez a megfeleltetés $S(A, X, \delta)$ -nak $F(X)/\beta$ -ra való izomorfizmusa.

1) A megfeleltetés leképezés. Legyen $\varphi : a \to ap$, $\Upsilon : a \to aq$ $(p, q \in F(X))$ és $\varphi = \Upsilon$. Akkor minden $a \in A$ -ra $ap = aq$, tehát $\bar{p} = \bar{q}$.

2) A megfeleltetés 1-1. Ha $\varphi \neq \Upsilon$, van olyan $a \in A$ hogy $ap \neq aq$, tehát $p \neq q$.

3) A megfeleltetés $F(X)/\beta$ -ra történik. Valóban, $F(X)/\beta$ $\bar{p}$ eleme az $a = ap$ transzformációnak felel meg.

4) A megfeleltetés felcserélhető a szorzással: $\varphi\Upsilon : a \to a(pq)$ -nak $\overline{pq}$ felel meg, ami éppen φ és Υ képeinek szorzata (a faktorstruktura-beli szorzás definiciója szerint).

Mivel automata félcsoportja az automata állapothalmazának egységelemes transzformációfélcsoportja (az identikus leképezés az $a \to ae$ transzformáció, ahol e $F(X)$ egységeleme), segitségével bevezethetjük az állapothalmazon a $\sim$ és $\approx$ relációkat (l. a 14. fejezet). Nevezzük az (A, X, δ) automatát minimálisnak, ha nincs valódi részautomatája, azaz A -nak nincs olyan valódi részhalmaza, amely zárt lenne az összes $x \in X$

müveletekre nézve. A 14. fejezetben láttuk, hogy egy automata akkor és csak akkor minimális, ha félcsoportja tranzitiv.

Azt mondjuk, hogy az (A, X, δ) automata reverzibilis, ha bármely $a \in A$ -hoz és $p \in F(X)$ -hez van olyan $q \in F(X)$ hogy $(ap)q = a$ (szemléletesen: ha az automata bemenő jelek valamely sorozatának hatására eredeti állapotából egy másik állapotba megy át, akkor onnan alkalmas bemenő jelsorozattal visszavihető az eredeti állapotba).

Egy automata akkor és csak akkor reverzibilis, ha előáll (páronként idegen) minimális részautomatáinak egyesitéseként. Ugyanis ha az (A, X, δ) automata reverzibilis, akkor a félcsoportja segitségével bevezetett $\sim$ és $\approx$ relációk megegyeznek (ha $a, b \in A$ -ra $a \sim b$, akkor $b \sim a$ is teljesül). Innen következik, hogy $A/\approx$ részbenrendezése (l. a 14. fejezetet) triviális (megegyezik az egyenlőség-relációval). Eszerint $A/\approx$ osztályai (A, X, δ) -nak részautomatái; továbbá (A, X, δ) félcsoportja minden ilyen C osztályon tranzitiv, ezért a $(C; X)$ automata félcsoportja is tranzitiv, s igy ezek a C osztályok minimális automaták.

Ha pedig az (A, X, δ) automata előáll minimális részautomatáinak egyesitéseként, akkor reverzibilis, mivel a minimális automaták - félcsoportjuk tranzitiv lévén - reverzibilisek.

Példák

1. Az ábrán látható $\mathcal{A}$ automata átmenetfüggvényének táblázata:

	1	2	3
x	1	1	1
y	3	1	2

2. Az $\mathcal{A}$ automata félcsoportja hat elemből áll: $y, y^2, y^3 = \iota, x, xy, xy^2$.

3. Az $\mathcal{A}$ automata minimális (és ezért reverzibilis).

4. Szabad félcsoport minden kongruenciája jobbkongruencia.

5. Tekintsük az $\mathcal{A}$ automatát az 1 generátorelemmel. Érvényes $x \alpha y^3$ de $(yx) \bar{\alpha} y^4$. Ezért az α jobbkongruencia nem kongruencia.

Gyakorlatok

1. Bármely egy elem által generált automatánál $\alpha=\beta$ akkor és csak akkor, ha α kongruencia; (2) β mindig az α-nál kisebb kongruenciák egyesitése.

2. Van olyan egyszerü automata, amely nem minimális és van olyan minimális automata, amely nem egyszerü.

3. Reverzibilis egyszerü automata minimális.

4. Bármely félcsoport izomorf egy automata félcsoportjával.

5. Bármely csoport izomorf egy automata automorfizmuscsoportjával.

55. Reguláris esemény

Legyen X véges halmaz, E pedig X fölötti esemény (azaz legyen $E\subseteq F(X)$). Azt mondjuk, hogy az E eseményt az (A,X,δ) automata felismeri, ha létezik olyan $a_0\in A$ állapot és olyan $B\subseteq A$ állapothalmaz, hogy bármely $p\in F(X)$ -re $p\in E$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a_0p\in B$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy alkalmasan választott állapotból bizonyos állapotokba éppen az E -hez tartozó szavak viszik át (A,X,δ) -t.

Azt mondjuk, hogy az E esemény véges automata által felismerhető, ha van olyan véges automata az X bemenő jel-halmazzal, amely E -t felismeri. A felismerés definiciójából következik, hogy ha E -t (A,X,δ) felismeri, akkor (A,X,δ) a_0 által generált részautomatája is felismeri, ugyanis ebbe a részautomatába a_0 és B minden eleme beletartozik. Igy tehát az E esemény akkor és csak akkor ismerhető fel véges automata által, ha van olyan egy elem által generált véges automata (az X bemenő jel-halmazzal), amely felismeri.

A következőkben bebizonyitjuk Kleene tételét, amely bizonyos áttekintést biztosit a véges automata által felismerhető események felett. Ehhez szükségünk lesz a reguláris esemény definiciójára:

1) Az X elemeiből álló egyelemü halmazok, valamint az üres halmaz reguláris események.

2) Ha $D, E\,(\subseteq F(X))$ reguláris események, akkor $D\cup E$ is az.

3) Ha $D, E\,(\subseteq F(X))$ reguláris események, akkor DE (komplexusszorzat!) is az.

4) Ha $D\,(\subseteq F(X))$ reguláris esemény, akkor a D által $F(X)$ -ben generált részmonoid (amelynek elemei tehát a D elemeiből képezhető összes véges számu tényezőt tartalmazó szorzatok és $F(X)$ egységeleme; jelölése $\{D\}$) is az.

5) Csak azok az X feletti események regulárisak, amelyek az 1) pontban emlitett reguláris eseményekből a 2), 3) és 4) képzési módok véges számu alkalmazásával előállnak.

E definició 1) és 4) pontjaiból következik, hogy $\langle e\rangle$ reguláris, hiszen $\langle e\rangle = \langle\emptyset\rangle$. Az 5) kikötés biztositja, hogy bármely $\emptyset$ -tól és $\langle e\rangle$ -től különböző reguláris eseménynek létezik reguláris kifejezése, azaz megadható hozzá olyan X elemeiből, az egyesités, a szorzás és a generálás jeléből (s az egyértelmüség biztositására esetleg zárójelekből) felépitett jelsorozat, amely megmutatja, hogy az esemény hogyan áll elő X elemeiből (pontosabban az általuk alkotott egyelemü halmazokból) a 2), 3) és 4) képzési módok segitségével. Reguláris esemény reguláris kifejezése általában nem egyértelmüen meghatározott, igy pl. $\{X_1\}\{X_2\}$ és

$$\{X_1^2\cup X_1^3\}\{X_2^2\cup X_2^3\}\cup(e\cup x_1\cup x_1^2)(e\cup x_2\cup x_2^2)$$

egyaránt annak a reguláris eseménynek reguláris felirása, mely az összes

$x_1^i x_2^j$ $(i,j=0,1,\dots)$ alaku szóból áll.

Forditva, minden reguláris kifejezés meghatároz (mégpedig egyértelmüen) egy reguláris eseményt, ti. azt, amely X elemeiből a kifejezésben feltüntetett módon épül fel.

Tétel: Az X feletti E esemény akkor és csak akkor ismerhető fel véges automata által, ha reguláris.

Szükségesség. Tegyük fel, hogy az E eseményt az (A,X,δ) véges automata felismeri $a_0\in A$ állapota és $\langle b_1,\dots,b_k\rangle\subseteq A$ állapothalmaza segitségével. Legyen E_i $(i=1,\dots,k)$ az az esemény, melyet (A,X,δ) a_0 állapota és $\langle b_i\rangle$ egyelemü állapothalmaza segitségével ismer fel; más szóval, E_i mindazon szavak halmaza, melyek (A,X,δ) -t az a_0 állapotból a b_i állapotba viszik át. Mivel $E=E_1\cup\dots\cup E_k$, elegendő az E_i események reguláris voltát igazolni, 2) miatt ugyanis ekkor E is reguláris.

Jelöljük most A elemeit az $1,\dots,n$ természetes számokkal. Azt fogjuk igazolni, hogy bármely $i,j\in A$ -ra $E_{ij}=\langle p\in F(X): ip=j\rangle$ reguláris.

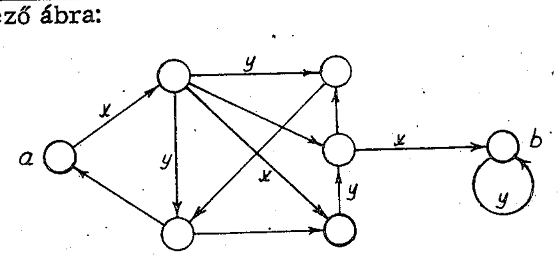
Jelölje E_{ij}^k mindazon szavak halmazát, melyek (A,X,δ) -t ugy viszik át i -ből j -be, hogy egyetlen valódi prefixük sem viszi át (A,X,δ) -t k -nál nagyobb számmal jelölt állapotba. Ekkor $E_{ij}=E_{ij}^n$. Ha tehát igazoljuk, hogy tetszőleges i,j,k -ra $(1\le i,j,k\le n)$ E_{ij}^k reguláris, készen leszünk a szükségesség bizonyitásával. E_{ij}^{k} reguláris voltát a felső index szerinti indukcióval fogjuk megmutatni.

E_{ij}^{0} szavainak nem lehet valódi prefixe (egy ilyen prefix (A,X,δ) -t i-ből 0-nál nagyobb számmal jelölt állapotba vinné át, hiszen minden állapotot 0-nál nagyobb szám jelöl). Igy E_{ij}^{0} legfeljebb 1 hosszuságu szavakból áll, vagy üres halmaz; ezért 1) és 2) szerint reguláris.

Tegyük fel, hogy bármely i,j -re E_{ij}^{k-1} reguláris. Vegyük észre, hogy $E_{ij}^{k} = E_{ik}^{k-1} \cup E_{ij}^{k-1}\{E_{kk}^{k-1}\}E_{kj}^{k-1}$. 2), 3) és 4) alkalmazásával nyerjük, hogy E_{ij}^{k} reguláris.

Az elegendőség bizonyitásához szükségünk lesz a kétpólusu gráf fogalmára. Tekintsünk egy (C,D,φ) gráfot, s jelöljük ki két (nem feltétlenül különböző) a és b csucsát. A $G=(C,D,\varphi,a,b)$ ötöst kétpólusu gráfnak, a-t és b-t G pólusainak nevezzük. Pályának nevezzük G éleinek egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sorozatát, ha e_1 kezdőpontja a, e_n végpontja b és a sorozat bármely elemének végpontja a következő elem kezdőpontja (a sorozatban ugyanaz az él többször is előfordulhat; ha az e_1 kezdőpontjára és e_n végpontjára tett kikötést elejtjük, akkor utról beszélünk).

Tekintsünk most egy λ leképezést D -ből X -be (más szóval, jelöljük meg X -egy-egy elemével G -nek bizonyos éleit). A $\Gamma = \langle G,X,\lambda \rangle$ hármast X elemeivel megjelölt kétpólusu gráfnak nevezzük. Ilyet szemléltet a következő ábra:



A köröcskék a csucsokat, a nyilak pedig az éleket jelzik.
Egy ilyen gráfban bármely uthoz tartozik egy szó: az adott utat alkotó éleket megjelölő betük sorozata (ha az ut valamely éle nincs X-beli elemmal megjelölve, ezt figyelmen kivül hagyjuk; az ábrán látható uthoz pl. az x_1x_2 szó tartozik; ha továbbá az ut egyetlen éle sincs megjelölve, az uthoz $F(x)$ egységelemét rendeljük). Egy ilyen gráfhoz tehát hozzárendelhetjük azt az eseményt, amely a gráf összes pályáihoz tartozó szavakból áll. Ezt az eseményt a gráf nyelvének nevezzük. Az $L \subseteq F(X)$ eseményt pedig gráfnyelvnek nevezzük, ha van olyan X elemeivel megjelölt kétpólusu gráf, amelynek nyelve L.

Mármost az elegendőség az alábbi három lemma következménye:

1. Minden X feletti reguláris esemény gráfnyelv.

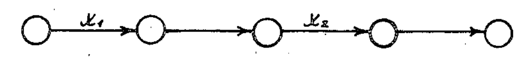
2. Minden X feletti gráfnyelv $F(X)$ egy véges indexü jobbkongruenciája osztályai valamely halmazának egyesitése.

3. Ha az L esemény $F(X)$ egy véges indexü jobbkongruenciája osztályai valamely halmazának egyesitése, akkor E véges automata által felismerhető.

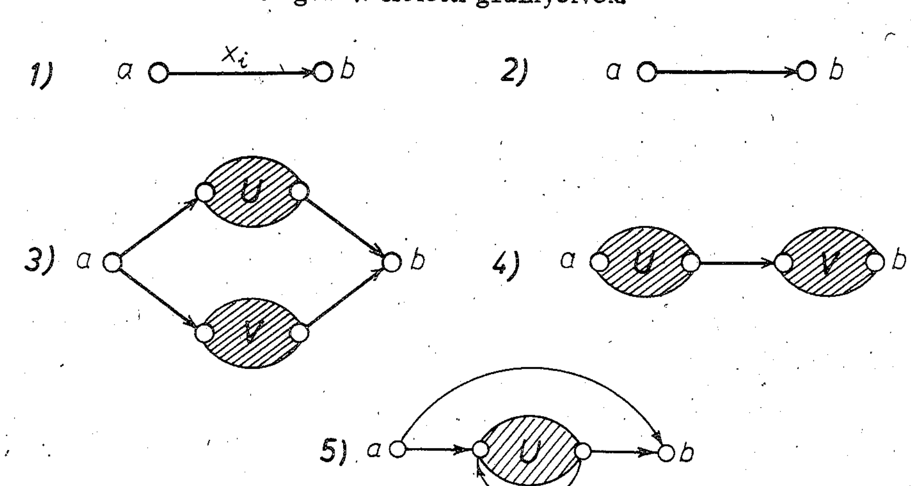
Az 1. lemma bizonyitása: A reguláris esemény definiciója szerint elegendő azt bizonyitanunk, hogy az X elemeiből álló egyelemü halmazok, valamint az üres halmaz gráfnyelvek, továbbá gráfnyelvek egyesitése, komplexus-szorzata, végül gráfnyelv által generált egységelemes félcsoport is gráfnyelv.

Az alábbi ábrák mutatják azokat az X elemeivel megjelölt kétpólusu gráfokat, melyeknek nyelve

1) x_i,
2) $\emptyset$,
3) $U \cup V$
4) UV
5) $\{U\}$



ahol U és V tetszőleges X feletti gráfnyelvek:



Itt pl.  azt az elemeivel megjelölt kétpólusu gráfot jelenti (a pólusok feltüntetésével), amelynek nyelve U.

A 2. lemma bizonyitása. Tekintsünk egy X elemeivel megjelölt Γ kétpólusu gráfot, s vegyük egy c csucsát. Gráfunk pólusainak most a-t és (b helyett) c-t tekintve egy uj Γ_c kétpólusu gráfhoz jutunk. Ha ebben van olyan pálya, amelyhez a $p(\in F(X))$ szó tartozik, akkor azt mondjuk, hogy c a p szó csucsa Γ-ban. Egy szónak természetesen több csucsa is lehet. A p szó összes csucsainak halmazát jelöljük $C(p)$ -vel (nincs kizárva $C(p) \neq \emptyset$).

Vezessünk be $F(X)$ -en egy relációt: legyen $p, q \in F(X)$ -re $p \alpha q$, ha $C(p) = C(q)$. Világos, hogy α ekvivalencia, emellett véges indexü, hiszen Γ csucsai C halmazának véges számu részhalmaza van. Megmutatjuk, hogy α jobbkongruencia. Elegendő azt megmutatnunk, hogy $p \alpha q$ esetén bármely $x \in X$ -re $C(px) \subseteq C(qx)$, hiszen a fordított irányu tartalmazás ugyanigy bizonyitható. Legyen $d \in C(px)$. Ez azt jelenti, hogy a Γ_d gráfban van olyan $e_1, \dots, e_n$ pálya, amelyhez a px szó tartozik. Ha i a legnagyobb olyan szám $(1 \leq i \leq n)$, hogy e_i meg van jelölve valamely X -beli elemmel, akkor szükségképpen $e_i \lambda = x$. Ha most g e_i kezdőpontja, akkor $e_1, \dots, e_{i-1}$ pálya a Γ_g gráfban, amelyhez a p szó tartozik, ezért $g \in C(p)$, és $p \alpha q$ miatt $g \in C(q)$. Van tehát Γ_g -ben olyan $f_1, \dots, f_{j-1}$ pálya is, amelyhez q tartozik, s ekkor az $f_1, \dots, f_{j-1}, e_i, \dots, e_n$ Γ_d-beli pályához a qx szó tartozik, tehát $d \in C(qx)$, amit bizonyitanunk kellett.

A Γ gráf nyelve az összes pályákhoz tartozó $F(X)$ -beli szavakból áll, vagyis mindazon p szavakból, melyekre $b \in C(p)$. Ezért egy tetszőleges szó akkor és csak akkor tartozik Γ nyelvéhez, ha α olyan osztályának eleme, amelyhez tartozó szavaknak b egyik csucsa. Γ nyelve tehát a véges indexü α jobbkongruencia osztályai egy halmazának egyesitése.

A 3. lemma bizonyitása. Megmutatjuk, hogy ha az X fölötti E esemény előáll $F(X)$ egy véges indexü jobbkongruenciája osztályai valamely halmazának egyesitéseként, akkor E véges automata által felismerhető. Ha a lemmában szereplő jobbkongruenciát α jelöli, akkor az E -t felismerő automata éppen az előző fejezetben leirt $(F(X)/\alpha, X, \bar{\delta})$ lesz. Ez véges, hiszen α véges indexü. Legyen $E = \bar{p}_1 \cup \dots \cup \bar{p}_k$. Tekintsük $(F(X)/\alpha, X, \bar{\delta})$ $\bar{e}$ állapotát és $\langle \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k \rangle$ állapothalmazát. Ha $p \in E$, akkor valamely i -re $(1 \leq i \leq k)$ $p \in \bar{p}_i$ továbbá $\bar{e}p = \overline{ep} = \bar{p} = \bar{p}_i \in \langle \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k \rangle$. Ha $\bar{e}p \in \langle \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k \rangle$ akkor $\bar{p} = \bar{p}_i$ valamely i -re $(1 \leq i \leq k)$, igy $p \in \bar{p}_i$, ahonnan $p \in E$. $(F(X)/\alpha, X, \bar{\delta})$ tehát felismeri E -t tekintett állapota és állapothalmaza által.

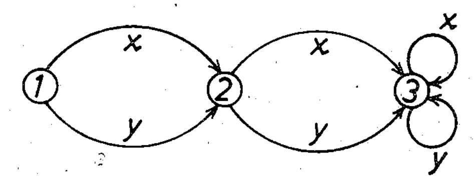
Ezzel Kleene tételét bebizonyitottuk. Valójában valamivel többet is bizonyitottunk, mégpedig azt, hogy $F(X)$ tetszőleges E részhalmazára a következő négy állitás ekvivalens:

1) E reguláris esemény,
2) E gráfnyelv,
3) E $F(X)$ egy véges indexü jobbkongruenciája bizonyos osztályainak egyesitése,
4) E véges automata által felismerhető.

Kiegészitésül megmutatjuk, hogy nem minden esemény ismerhető fel véges automata által. Tekintsük pl. azt a H eseményt $F(x,y)$ -ban, mely az összes $x^n y^n$ $(n > 0)$ alaku szavakból áll. Tegyük fel, hogy az $(A, \langle x, y \rangle, \delta)$ véges automata felismeri H -t a_0 állapotával és állapothalmazával. Tekintsük az $a_0 x^i$ állapotokat $(i = 0, 1, \dots)$. Mivel $(A, \langle x, y \rangle, \delta)$ -nak véges számu állapota van, a tekintett állapotok között lesznek megegyezők, pl. $a_0 x^i = a_0 x^j$ $(i \neq j)$. Ekkor $a_0 x^j y^i = a_0 x^i y^i \in B$, mivel $x^i y^i \in H$; ezért $x^j y^i \in H$, ami azonban H definiciója szerint nem igaz. A kapott ellentmondás mutatja, hogy H nem ismerhető fel véges automata által.

Példák

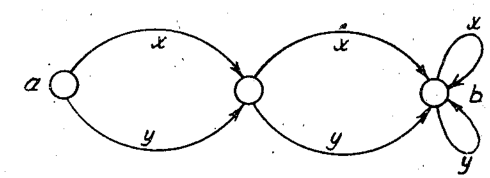
1. Az $F(x,y)$ szabad félcsoport összes legalább kettő hosszuságu szavainak M halmaza véges automata által felismerhető esemény; felismeri pl. az az automata, amely a következő gráffal van megadva:



302

2. Az M halmaz reguláris esemény; reguláris kifejezése pl. $(x \cup y)(x \cup y)\{x \cup y\}$.

3. Az M halmaz gráfnyelv; pl. a következő, x, y elemekkel megjelölt kétpólusu gráf nyelve:



302

4. Az M halmaz $F(x,y)$ egy véges indexü jobbkongruenciájának osztálya: ilyen jobbkongruenciát (sőt kongruenciát) nyujt $F(x,y)$ következő osztályozása: $\langle \langle e \rangle, \langle x, y \rangle, \langle M \rangle \rangle$.

5. Az előző fejezet $\mathcal{A}$ automatája 1 állapotával és $\langle 2 \rangle$ állapothalmazával az E_{12} eseményt ismeri fel, amelynek egy reguláris kifejezése:

$$E_{12} = E^{3}_{12} = E^{2}_{12} \cup E^{2}_{13}\ \{E^{2}_{33}\}\ E^{2}_{32} = \{x\}\, y\ \{x\,\{x\}\, y \cup y\,(x \cup y)\{x\}\, y\}\, y$$

(mivel $E^{2}_{12} = \emptyset$).

Gyakorlatok

1. Alkossuk meg azt a kétpólusu gráfot, amelyek nyelve

   a) $x^2\{xy \cup yx\} \cup \{y^3\}(x \cup xy)$,

   b) $\{x^2\}\, y \cup \{y^2\}\, x$.

2. Alkossuk meg azokat a véges automatákat, amelyek az előző gyakorlatban megadott reguláris eseményeket felismerik!

3. Legyen $n \neq 1$ természetes szám. Az összes természetes számok n-es számrendszerbeli felirásai reguláris eseményt alkotnak.

4. Legyen K természetes számoknak az összeadásra nézve zárt halmaza. Az $\langle x^n : n \in K \rangle$ halmaz reguláris esemény.

5. Legyen Q a természetes számok négyzeteinek halmaza. Az $\langle x^n : n \in Q \rangle$ halmaz nem reguláris esemény.

6. Egy $E \subseteq F(X)$ esemény akkor és csak akkor reguláris, ha $F(X)$ egy véges indexü kongruenciája bizonyos osztályainak egyesitése.

7. Adott X ábécé feletti, véges automata által felismerhető események halmaza a halmazegyesités és metszetképzés müveletekkel Boole-algebrát alkot.

8. Legyen E reguláris esemény. Létezik-e olyan véges automata, amely felismeri mindazon szavak halmazát, melyek valamely szuffixe E-hez tartozik?

56. Kontextus-mentes nyelv

Definiálni fogjuk az X feletti eseményeknek egy másik fontos osztályát. Tekintsünk egy véges Y halmazt ($Y \cap X = \emptyset$), amelyben ki van jelölve egy y_0 elem, továbbá (y,p) alaku pároknak egy véges S halmazát, ahol $y \in Y$, $p \in F(X \cup Y)$. Feltehetjük, hogy S bármely $y \in Y$-ra tartalmaz (y,p) alaku párt. Az (Y, y_0, S) hármast (X feletti) szintakszisnak, S elemeit pedig e szintakszis szabályainak nevezzük.

Egy (y,p) szabály alkalmazásán az y-t tartalmazó q szóra y egy q-beli előfordulásának p-vel való helyettesitését értjük. Levezetésnek $F(X \cup Y)$-beli szavaknak olyan véges sorozatát nevezzük, amelynek első eleme y_0, minden további eleme a megelőzőből egy szabály alkalmazásával áll elő, utolsó elemére pedig egyetlen szabály sem alkalmazható. Az olyan szót, amely valamely levezetés utolsó eleme, terminális szónak nevezzük. Világos, hogy a terminális szavak mind $F(X)$-be tartoznak; ezért bármely szintakszissal képezett összes terminális szavak X feletti nyelvet alkotnak. Azokat a nyelveket, melyek ilyen módon előállnak, kontextusmentes nyelveknek nevezzük. (Az elnevezést indokolja, hogy vizsgálnak olyan nyelveket is, melyek szabályai között (syt, spt) alakuak is előfordulnak. Az ilyen szabályt pedig ugy lehet tekinteni, hogy az nem más, mint az (y,p) szabály, azzal a megkötéssel, hogy csak az s és t szavak által alkotott "kontextus"-ban lehet alkalmazni).

Tétel: Minden reguláris esemény kontextus-mentes nyelv.

Legyen $E \subseteq F(X)$ reguláris. Tudjuk, hogy E gráf-nyelv, tehát létezik olyan X elemeivel megjelölt Γ kétpólusu gráf, amelynek nyelve E.

Legyen $\Gamma = (G, X, \lambda)$ és $G = (C, D, \varphi, a, b)$. Definiálni fogunk egy kontextus-mentes nyelvet, amely megegyezik E-vel.

Legyen $Y = C$, $y_0 = a$, továbbá D minden d eleméből kiindulva képezzünk egy szabályt - azokból az élekből pedig, amelyeknek végpontja b, egy további szabályt is - a következő módon. Tegyük fel, hogy d kezdőpontja c_i, végpontja c_j. Legyen a d-hez rendelt szabály

1) (c_i, c_j), ha d nincs megjelölve X-beli elemmel,

2) $(c_i, x c_j)$, ha d az $x \in X$ elemmel van megjelölve, továbbá

3) (c_i, e), ha $c_j = b$ és d nincs megjelölve X-beli elemmel,

4) (c_i, x), ha $c_j = b$ és d az $x \in X$ elemmel van megjelölve.

S álljon a D elemeiből képezett összes szabályokból. Megmutatjuk, hogy az igy definiált $\langle Y, y_0, S \rangle$ szintakszissal képezett E' kontextusmentes nyelv megegyezik E-vel.

Legyen először $p \in E$. Akkor létezik olyan $e_1, \dots, e_n$ pálya Γ-ban, amelyhez p tartozik. Sorban alkalmazva y_0-ra az ezen pálya éleiből képezett S-beli szabályokat, éspedig ugy, hogy 3) vagy 4) alaku szabályt csak a legutolsó lépésben alkalmazunk, a p terminális szóhoz jutunk (figyelembe véve szükség esetén, hogy $pe=p$). Ezért $E \subseteq E'$.

Legyen most $p \in E'$. Tekintsük az S -beli szabályoknak azt a sorozatát, melynek alkalmazásával $y_0=a$ -ból p előáll, s vegyük mindazon $F(X \cup C)$ -beli szavak $a=p_0, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n=p$ sorozatát, melyek eközben fellépnek. Az 1) - 4) szabályok alakjából következik, hogy mindezek a szavak - kivéve magát p -t - egyetlen C -beli elemet tartalmaznak, továbbá $i=0,\dots,n-1$ -re a p_i -ben és a p_{i+1} -ben szereplő C-beli elem Γ valamely élének kezdő- illetve végpontja, végül, ezek az élek pályát képeznek Γ-ban. Észrevesszük, hogy ehhez a pályához éppen a p szó tartozik, ezért $p \in E$. A bizonyitás kész.

A tétel megforditása nem igaz: van olyan kontextus-mentes nyelv, amely nem reguláris. Ennek belátásához tekintsük az előző fejezetben látott H nem-reguláris nyelvet, amely az összes $x^n y^n$ alaku szavakból áll. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $\langle\langle z\rangle, z, S\rangle$ szintakszissal képezett nyelv, ahol S a (z, xy) és (z, xzy) szabályokból áll, megegyezik H -val. H tehát kontextus-mentes nyelv.

Megmutatjuk, hogy nem minden esemény kontextus-mentes nyelv. Legyen X egyelemü és álljon K $F(X)$ mindazon elemeiből, amelyeknek hosszusága 2^i $(i=0,1,2,\dots)$. Nevezzük egy esemény spektrumának mindazon n természetes számok növekvő sorozatát, amelyekre létezik n hosszuságu szó K -ban. Nevezzük továbbá természetes számok egy $n_1, n_2, \dots$ növekvő sorozatát hézagosnak, ha bármely m természetes számhoz van olyan $i (\in \mathcal{N})$ hogy $n_{i+1} - n_i > m$. A K esemény spektruma nyilvánvalóan hézagos.

Állitjuk, hogy K nem kontextus-mentes nyelv. Elegendő azt megmutatnunk, hogy egyetlen végtelen kontextus-mentes nyelv sem lehet hézagos. Vizsgáljunk tetszőleges olyan X feletti (Y, y_0, S) szintakszist, amely végtelen L nyelvet határoz meg.

Bármely $y \in Y$ betüből szabályok véges számu alkalmazásával terminális szó keletkezik (különben y nem szerepelne egyetlen levezetésben sem, és igy elhagyható volna Y -ból; ugyszintén az y -t tartalmazó szabályokat is elhagyhatnánk S -ből). Jelölje a legrövidebb ilyen terminális szó hosszuságát $\ell(y)$. Legyen $\ell = \max_{y \in Y} \ell(y)$.

Mivel a szabályok száma véges, van olyan k természetes szám, hogy bármely $(y,p) \in S$ -re $\ell(p) \le k$. Ha tehát $(y,p) \in S$, akkor van olyan legfeljebb $k\ell$ hosszuságu terminális szó, amely p -ből szabályok véges számu alkalmazásával áll elő.

Minthogy a vizsgált L nyelv végtelen, van olyan $\sigma_1 \in S$ szabály, hogy $y_0\sigma_1$ (az a szó, amely y_0 -ból σ_1 alkalmazásával keletkezik) végtelen sok levezetésben előfordul; emellett van olyan $y_1 \in Y$ betü $y_0\sigma_1$-ben, hogy az (Y, y_1, S) szintakszissal meghatározott L_1 nyelv is

végtelen (különben $y_0\sigma_1$ -ből csak véges számu terminális szó lenne levezethető). Most $y_0\sigma_1$ -ből szabályok véges számu alkalmazásával egyrészt nyerhetünk egy legfeljebb $k\ell$ hosszuságu terminális szót, másrészt - ha az $y_0\sigma_1$ -ben szereplő y_1 valamelyik előfordulását változatlanul hagyjuk, mig az összes többi $y_0\sigma_1$ -beli $y \in Y$ betükből terminális szavakat képezünk - olyan ugyancsak legfeljebb $k\ell$ hosszuságu q_1 szót is, melyben az egyetlen y_1 -en kivül minden betü X eleme.

Minthogy az L_1 nyelv is végtelen, van olyan $\sigma_2 \in S$ szabály, hogy $q_1\sigma_2$ (q_1 -re σ_2 -t egyetlen módon lehet alkalmazni!) végtelen sok levezetésben előfordul; emellett van olyan $y_2 \in Y$ betü $q_1\sigma_2$ -ben, hogy az (Y, y_2, S) szintakszis végtelen sok terminális szót határoz meg. Ekkor $q_1\sigma_2$ -ből egyrészt egy legfeljebb $\ell(q_1) - 1 + k\ell$ hosszuságu terminális szót kaphatunk, másrészt - q_1 előállitásához hasonlóan - kaphatunk olyan ugyancsak legfeljebb $\ell(q_1) - 1 + k\ell$ hosszuságu q_2 szót is, melyben az egyetlen y_2 -n kivül minden betü X eleme.

Ugyanigy kaphatunk legfeljebb $\ell(q_2) - 1 + k\ell$ hosszuságu terminális szót és minden i-re legfeljebb $\ell(q_i) - 1 + k\ell$ hosszuságu terminális szót is. Ezért, ha L spektruma az $n_1, n_2, \dots$ sorozat, akkor bármely i -re $n_{i+1} - n_i < k\ell$; igy L spektruma nem hézagos, amit bizonyitanunk kellett.

Példák

1. Nevezzük az $x_1 \dots x_n \in F(x,y)$ legalább 1 hosszuságu szót szimmetrikusnak, ha $x_1 \dots x_n = x_n \dots x_1$. Az összes szimmetrikus szavak kontextus-mentes nyelvet alkotnak, amelynek szintakszisa: $\langle (y_0, x), (y_0, y), (y_0, xx), (y_0, yy), (y_0, xy_0x), (y_0, yy_0y) \rangle$.

2. A kontextus-mentes nyelv fogalma alkalmas a természetes nyelvek "megközelitésére". Legyen pl. X a magyar nyelv szavainak halmaza, $Y = \langle$ "mondat", "alany", "állitmány", "tárgy", "határozó", "jelző" $\rangle$, y_0 = "mondat"; emellett álljon az S szintakszis a következő alaku szabályokból: ("mondat", "alany" "állitmány"), ("állitmány", "állitmány" "tárgy"), ("alany", a kutya), ("állitmány", kergeti), ("tárgy", a macskát) stb. Világos, hogy az X feletti (Y, y_0, S) kontextus-mentes nyelv egyik szava (terminális szó) lesz pl.: a kutya kergeti a macskát. Nem nehéz belátni, hogy a kontextus-mentes nyelv fölöttébb tökéletlen eszköz a természetes nyelvek leirására; ugyanakkor azonban megfigyelhető, hogy a kontextus-mentes nyelv szintakszisa a természetes nyelvek szokásos mondattanának absztrakt alakja.

3. A véges $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ halmaz feletti összes reguláris kifejezések alkotta R esemény $(R \subset F(X, (,), \cup, \{, \}))$ kontextus-

mentes nyelv: $Y = \langle y_0 \rangle$ a szabályok pedig a következők:

$$(y_0, y_0 \cup y_0), \quad (y_0, (y_0)(y_0)), (y_0, \{y_0\}), (y_0, x_i) \; (i = 1, \ldots, n).$$

(A reguláris kifejezések megszokott alakja abban különbözik e kontextus-mentes nyelv szavaitól, hogy az előbbiekben a zárójeleket mindig elhagyjuk, amikor ezt félreértés veszélye nélkül tehetjük[1/].)

Gyakorlatok

1. Vegyük észre, hogy az ALGOL nyelv kontextus-mentes nyelv! Vizsgáljuk meg, mi játssza szintakszisában X, Y, y_0 és S szerepét!

2. A kezdő- és végzárójel által generált szabad félcsoportnak összes olyan elemei (ezek zárójelsorozatok!), amelyek szabályos szorzatban (l. a 13. fejezetet) előfordulnak, kontextus-mentes nyelvet alkotnak.

57. Mealy-automata

Tekintsük az (A, X, δ) automatát. Legyen Y egy további halmaz, λ pedig $A \times X$ -nek Y -ba való leképezése. Az igy előálló $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ötöst (nem kötöttük ki a halmazok, ill. a leképezések különbözőségét!) Mealy-automatának nevezzük. Automatán ebben a fejezetben mindig Mealy-automatát értünk. Y elemeit az $\mathcal{A}$ automata kimenő jeleinek, a λ függvényt pedig $\mathcal{A}$ kimenetfüggvényének nevezzük. Ha $\lambda(a, x) = y \in Y$, azt mondjuk, hogy automatánk az a állapotban az x bemenő jel hatására az y kimenő jelet adja ki. Véges automata esetén a kimenetfüggvényt - az átmenetfüggvényhez hasonlóan - táblázattal adhatjuk meg. Megjegyezzük, hogy Mealy-automata esetén is beszélhetünk részautomatáról, speciálisan, egy elem által generált részautomatáról, minimális automatáról stb.; pl. $(A, X, Y, \delta, \lambda)$ -t minimálisnak nevezzük, ha (A, X, δ) minimális.

Hasonlóan ahhoz, ahogyan a közönséges automaták átmenetfüggvényének értelmezési tartományát $A \times X$ -ről $A \times F(X)$ -re terjesztettük ki, most Mealy-automata kimenetfüggvényének értelmezési tartományát is kiterjesztjük $A \times X$ -ről $A \times F(X)$ -re. Az 1 hosszuságu $F(X)$ -beli x szavakra $\lambda(a, x)$ adott; tegyük fel, hogy bármely $a \in A$ -ra és $n-1$ hosszuságu $p \in F(X)$ szóra $\lambda(a, p)$ -t már értelmeztük. Akkor bármely

---

[1/] Hangsulyozzuk, hogy mig a szokásos változó-helyettesités esetén a változó minden egyes előfordulása helyébe ugyanazt az uj kifejezést irjuk, addig a szintaktikus szabály alkalmazásakor a helyettesitendő elemnek csak egy előfordulása helyébe irunk uj szót.

$x \in X$ -re legyen $\lambda(a, px) = \lambda(a, p) \quad \lambda(ap, x)$. Részletesebben, ha $q = x_1, \ldots, x_n$ $(x_i \in X)$, akkor

$$\lambda(a, q) = \lambda(a, x_1)\, \lambda(ax_1, x_2)\, \lambda(ax_1x_2, x_3) \ldots \lambda(ax_1 \ldots x_{n-1}, x_n).$$

$(\lambda(a, q) \in F(Y)$; ennek megfelelően $F(Y)$ elemeit kimenő szavaknak nevezzük.) A Mealy-automatának valamely $x_1, \ldots, x_n$ bemenő jelsorozat (szó) melletti müködését tehát a következőképpen irhatjuk le: az automata az a állapotban az x_1 bemenő jel hatására az $y_1 = \lambda(a, x_1)$ kimenő jelet bocsájtja ki és átmegy az $ax_1 = \delta(a, x_1)$ állapotba; ebben az állapotban kapja az x_2 bemenő jelet, melynek hatására az $y_2 = \lambda(ax_1, x_2)$ kimenő jelet szolgáltatja és átmegy az $ax_1x_2 = \delta(ax_1, x_2)$ állapotba; ebben az állapotban kapja az x_3 bemenő jelet stb.

Rögzitsük az $\mathcal{A}$ automata a állapotát és tekintsük a φ_a : $p \to \lambda(a, p)$ $(p \in F(X))$ leképezést. Látjuk, hogy φ_a az $F(X)$ szabad félcsoportnak $F(Y)$ -ba való leképezése. Azt mondjuk, hogy φ_a az $\mathcal{A}$ automata a állapota által indukált leképezés. Észrevesszük, hogy a szavak hosszusága φ_a -val szemben invariáns, továbbá, ha a legalább r hosszuságu $p, q \in F(X)$ szavak r hosszuságu prefixe egyenlő, akkor a $p\varphi_a$, $q\varphi_a \in F(Y)$ szavak r hosszuságu prefixe is megegyezik. Rövidebben,

1) ha $p \in F(X)$, $\ell(p\varphi_a) = \ell(p)$,

2) ha $p = qs$, akkor $p\varphi_a = q\varphi_a t$, ahol t a -tól, q -tól és s -től függő $F(Y)$-beli szó.

Az utóbbi tulajdonságot ugy is kifejezhetjük, hogy φ_a a prefix-képzéssel felcserélhető (részletesebben: bármely $n \in \mathcal{N}$ -re az n hosszuságu prefix képzésével felcserélhető).

Nevezzük az $F(X)$ szabad félcsoportnak az $F(Y)$ szabad félcsoportba való φ leképezését automata-leképezésnek, ha létezik olyan $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata s annak olyan a állapota, hogy φ éppen az $\mathcal{A}$ automata a állapota által indukált leképezés.

Tétel: Szabad félcsoportnak szabad félcsoportba való leképezése akkor és csak akkor automata-leképezés, ha megtartja a szavak hosszát és felcserélhető a prefix-képzéssel.

Bizonyitás: Látuk, hogy a feltétel szükséges. Tegyen eleget a $\varphi : F(X) \to F(Y)$ leképezés a feltételnek. Definiálni fogunk egy automatát, melynek alkalmas állapota φ -t indukálja.

Legyen $p \in F(X)$. Értelmezzük a φ_p leképezést a következőképpen: ha $q \in F(X)$ és $(pq)\varphi = p\varphi \cdot s$, akkor legyen $q\varphi_p = s$. Álljon a definiálandó $\mathcal{D}$ automata állapothalmaza az összes különböző φ_p $(p \in F(X))$ alaku leképezésekből, bemenő és kimenő jeleinek halmaza legyen X és Y, emellett bármely $x \in X$ -re legyen $\delta(\varphi_p, x) = \varphi_{px}$, végül $\lambda(\varphi_p, x)$ legyen egyenlő $(px)\varphi$ utolsó betűjével (azaz $x\varphi_p$ -vel). Megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{D}$ automata φ_e állapota éppen a φ leképezést indukálja. Valóban, legyen $x_1 \ldots x_n \in F(X)$ és $(x_1 \ldots x_n)\varphi = y_1 \ldots y_n$. Azt kell megmutatnunk, hogy $\lambda(\varphi_e, x_1 \ldots x_n) = (x_1 \ldots x_n)\varphi$. Érvényes $\lambda(\varphi_e, x_1 \ldots x_n) = (x_1\varphi)(x_2\varphi_{x_1})(x_3\varphi_{x_1x_2})\ldots(x_n\varphi_{x_1\ldots x_{n-1}})$. De $x_i\varphi_{x_1\ldots x_{i-1}}$ definició szerint egyenlő az $(x_1 \ldots x_i)\varphi$ szó utolsó betűjével, azaz y_i -vel, s igy i szerinti teljes indukcióval belátható $\lambda(\varphi_e, x_1 \ldots x_i) = y_1 \ldots y_i = (x_1 \ldots x_i)\varphi$, azaz $i=n$ esetén $\lambda(\varphi_e, x_1 \ldots x_n) = y_1 \ldots y_n = (x_1 \ldots x_n)\varphi$, amit bizonyitani kellett.

Nevezzük az $\mathfrak{A}$ automata a állapotát *ekvivalensnek* a $\mathfrak{B}$ automata b állapotával, ha a két állapot ugyanazt a leképezést indukálja (természetesen csak olyan automaták állapotai lehetnek ekvivalensek, melyeknél a bemenő jelek halmaza megegyezik, a kimenő jelek halmazainak közös része pedig nem üres). Nevezzük továbbá *ekvivalensnek* az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ automatákat, ha bármelyikük bármely a állapotához van a másik automatának a-val ekvivalens állapota. Két automata ekvivalens volta tehát azt jelenti, hogy a két automata állapotai ugyanazokat a leképezéseket indukálják. Könnyen belátható, hogy mind állapotok, mind automaták esetén valóban ekvivalenciarelációt definiáltunk.

Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{A}$ automata *redukált*, ha állapotai között nincsenek ekvivalensek. Megadunk egy eljárást, amelynek segitségével bármely $\mathfrak{A}$ véges automatához megalkotható egy vele ekvivalens redukált automata. Az $\mathfrak{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata A állapothalmaza felbomlik ekvivalens állapotok osztályaira; jelölje ezt az osztályozást C. Legyen bármely $\bar{a} \in C$ -re $\bar{\delta}(\bar{a}, x) = \overline{ax}$, $\bar{\lambda}(\bar{a}, x) = \lambda(a, x)$. Ezek a definiciók a $\bar{\delta}(\bar{a}, x)$ és $\bar{\lambda}(\bar{a}, x)$ elemeket egyértelműen meghatározzák. Valóban, ha $\bar{a} = \bar{a}_1$, akkor az a és a_1 által indukált leképezések megegyeznek, márpedig $\lambda(a, x)$ és $\lambda(a_1, x)$ éppen az x szónak e leképezések melletti képei. Továbbá, ha $\bar{a} = \bar{a}_1$, akkor bármely $x \in X$ -re $\overline{ax} = \overline{a_1x}$; mert ha valamely x -re $\overline{ax} \neq \overline{a_1x}$ teljesülne, akkor létezne olyan $p \in F(X)$, amelynek az ax ill. az a_1x állapot által indukált leképezések melletti képei különböznek, de akkor különböznének xp -nek az a ill. az a_1 állapot által indukált leképezések melletti képei is.

Tekintsük mostmár a $\mathfrak{B} = (C, X, Y, \bar{\delta}, \bar{\lambda})$ automatát, ahol $\bar{\delta}$ és $\bar{\lambda}$ a most definiált leképezések. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{B}$ ekvivalens $\mathfrak{A}$ -val, éspedig $\mathfrak{B}$ tetszőleges $\bar{a} (\in C)$ állapota ekvivalens $\mathfrak{A}$ -nak az a állapotával. Legyen $x_1 \ldots x_n \in F(X)$; ekkor $\bar{\delta}$ és $\bar{\lambda}$ definiciója szerint $\bar{\lambda}(\bar{a}, x_1 \ldots x_n) = \bar{\lambda}(\bar{a}, x_1)\bar{\lambda}(\overline{ax_1}, x_2)\ldots\bar{\lambda}(\overline{ax_1 \ldots x_{n-1}}, x_n) =$

$= \lambda(a, x_1)\lambda(ax_1, x_2)\ldots\lambda(ax_1 \ldots x_{n-1}, x_n) = \lambda(a, x_1 \ldots x_n)$,

tehát az $\bar{a}$ és az a állapot ugyanazt a leképezést indukálja.

Ha ismerjük a véges $\mathfrak{A}$ automata átmenet- és kimenetfüggvényét, a következő módon találhatjuk meg a C osztályozást. Tekintsük a Θ_1 relációt, amelynek értelmezése: $a, b \in A$-ra $a\Theta_1 b$ ha minden $x \in X$ -re $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$. Legyen továbbá $a\Theta_2 b$, ha $a\Theta_1 b$ és minden $x \in X$ -re $(ax)\Theta_1(bx)$; $a\Theta_3 b$, ha $a\Theta_2 b$ és minden $x \in X$ -re $(ax)\Theta_2(bx)$ és igy tovább. Definiciójukból látszik, hogy $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ ekvivalenciák az A halmazon, továbbá minden $i \in \mathcal{N}$ -re $\Theta_i \supseteq \Theta_{i+1}$. Ha $\Theta_i \supset \Theta_{i+1}$, akkor a Θ_{i+1} -hez tartozó osztályozás több osztályból áll, mint a Θ_i -hez tartozó. A véges A halmaz egyetlen osztályozása sem állhat azonban több osztályból, mint A elemeinek száma; ezért van olyan $k \in \mathcal{N}$, hogy $\Theta_k = \Theta_{k+1}$. (Ha A -nak $n > 1$ eleme van, akkor $k \leq n-1$). Ekkor viszont minden $\ell > k$ -ra $\Theta_\ell = \Theta_k$ (a Θ_i relációk definiciója szerint). Állitjuk, hogy φ éppen a Θ_k ekvivalenciához tartozó osztályozás. Azt kell megmutatnunk, hogy $a\Theta_k b$ akkor és csak akkor, ha a és b ugyanazt a leképezést indukálja. Ha $a\Theta_k b$, akkor p hosszúsága szerinti teljes indukcióval nyerjük, hogy minden $p \in F(X)$ -re $(ap)\Theta_k(bp)$, tehát $\lambda(ap, x) = \lambda(bp, x)$ teljesül minden $x \in X$ -re. Ezért

$$\lambda(a, x_1 \ldots x_n) = \lambda(a, x_1)\cdot\lambda(ax_1, x_2)\ldots\lambda(ax_1 \ldots x_{n-1}, x_n) = \lambda(b, x_1)\cdot\lambda(bx_1, x_2)\lambda(bx_1 \ldots x_{n-1}, x_n) = \lambda(bx_1 \ldots x_n)$$

fennáll minden $x_1 \ldots x_n \in F(X)$ szóra. Ha pedig $a\Theta_k b$ nem igaz, akkor legyen i a legkisebb olyan természetes szám, melyre $a\Theta_i b$ nem igaz. Ha $i = 1$, van olyan $x \in X$, hogy $\lambda(a, x) \neq \lambda(b, x)$, tehát az a és b által indukált leképezés már az x szóra alkalmazva is különböző eredményt ad. Az $i > 1$ esetben pedig $a\Theta_{i-1}b$, de van olyan $x \in X$, hogy $(ax)\Theta_{i-1}(bx)$ nem igaz. Az indukciófeltevés alapján létezik olyan $q \in F(X)$, hogy $\lambda(ax, q) \neq \lambda(bx, q)$, de akkor

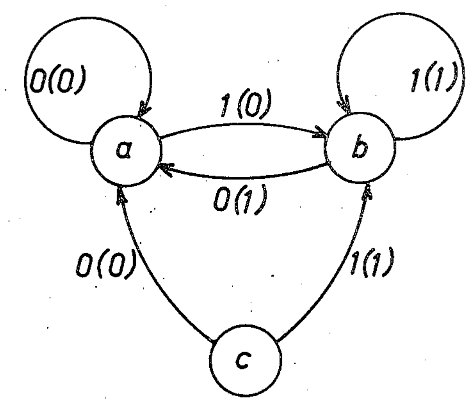
$$\lambda(a, xq) = \lambda(a, x)\cdot\lambda(ax, q) \neq \lambda(b, x)\cdot\lambda(bx, q) = \lambda(b, xq).$$

tehát a és b most is különböző leképezéseket indukálnak. Igazoltuk tehát, hogy Θ_k -hoz a keresett C osztályozás tartozik.

Tekintsük az $\mathfrak{A} = (A, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ és $\mathfrak{B} = (B, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$ véges automatákat. Ha $\mathfrak{A}$ ekvivalens $\mathfrak{B}$ -vel, akkor a két automata *megkülönböztethetetlen* a következő értelemben: bármely (p, q) $(p \in F(X), q \in F(Y))$ szó-pár esetén, ha az egyik automatának van olyan állapota, amelyben a p bemenő szóra a q kimenő szóval válaszol (vagyis a szóban forgó állapot által indukált leképezés p -t q -ba viszi át), akkor a másik automatának is van ilyen állapota. Könnyen átlátható, hogy az automaták megkülönböztethetetlensége is ekvivalenciareláció.

A megkülönböztethetetlenség elnevezést (és magát a fogalom bevezetését) a következő meggondolás indokolja. Tegyük fel, hogy ismerjük az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ automata átmenet- és kimenetfüggvényét. Egy automatáról, melyről tudjuk, hogy csak $\mathcal{A}$ vagy $\mathcal{B}$ lehet, el kell döntenünk, hogy melyik is valójában, nincs azonban más lehetőségünk az automata megvizsgálására, mint bemenő jelsorozatok adása s a megfelelő kimenő jelsorozatok megvizsgálása (szokásos kifejezéssel élve: az automatát "fekete doboz"-nak tekintjük, s "kisérletet" végzünk rajta). A probléma megoldása ezzel a módszerrel lehetetlen, ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megkülönböztethetetlen automaták.

Láttuk, hogy ekvivalens automaták megkülönböztethetetlenek. A forditott állitás nem igaz; léteznek megkülönböztethetetlen, de nem ekvivalens automaták. Speciálisan, van olyan automata, amely megkülönböztethetetlen egy valódi részautomatájától, bár nem ekvivalens vele. Ilyen $\mathcal{M} = (\langle a,b,c\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,1\rangle, \delta, \lambda)$ automatát látunk az ábrán (a kimenetfüggvény értékét zárójelben az élek mellett tüntettük fel):



Az $\mathcal{M}$ automatának részautomatája az $\langle a,b\rangle$ állapothalmazu $\mathcal{L}$ automata. Világos, hogy $\mathcal{M}$ állapotai páronként nemekvivalensek ($\lambda(c,0) \neq \lambda(b,0) \neq \lambda(a,0)$ és $\lambda(c,1) \neq \lambda(a,1)$), ugyanakkor $\mathcal{M}$ tetszőleges 0 -val kezdődő bemenő szóra az a és c állapotban ugyanazzal a kimenő szóval válaszol, továbbá bármely 1-gyel kezdődő bemenő szóra a b és c állapotban ugyanazzal a kimenő szóval válaszol. Ezért $\mathcal{M}$ nem ekvivalens $\mathcal{L}$ -lel, ugyanakkor megkülönböztethetetlen $\mathcal{L}$ -től.

Az $\mathcal{M}$ automata egyben azt is mutatja, hogy redukált automata esetén sem dönthető el egyetlen kisérlettel (bemenő jelsorozat adásával és a válaszként kapott kimenő jelsorozat megvizsgálásával), hogy eredetileg melyik állapotában volt. Ez az észrevétel emlékeztet az elméleti fizika Heisenberg-féle határozatlansági elvére.

Példánkban $\mathcal{L}$ valódi részautomatája $\mathcal{M}$ -nek. Általában, ha két nem ekvivalens véges automata megkülönböztethetetlen, akkor legalább az egyiknek van valódi részautomatája. Állitásunk az alábbi tétel következménye.

Tétel: Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ megkülönböztethetetlen reverzibilis véges automaták, akkor $\mathcal{A}$ ekvivalens $\mathcal{B}$ -vel.

Bizonyitás: Elegendő azt igazolnunk, hogy ha $\mathcal{A}$ reverzibilis és megkülönböztethetetlen $\mathcal{B}$ -től, akkor $\mathcal{A}$ bármely a állapotához van $\mathcal{B}$ -nek a -val ekvivalens állapota. Legyen $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$, $\mathcal{B} = (B, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$. Ha $a \in A$, $p \in F(X)$, akkor a megkülönböztethetetlenség definiciója szerint van olyan $b \in B$, hogy $\lambda_2(b,p) = \lambda_1(a,p)$. Jelölje az összes ilyen b állapotok halmazát $L(a,p)$. Bármely $p \in F(X)$ -re az $L(a,p)$ halmaz véges és nem üres. Ezért választhatjuk ugy p -t, hogy $L(a,p)$ elemeinek száma minimális legyen. Tegyük fel, hogy p máris ilyen.

Mivel $\mathcal{A}$ reverzibilis, van olyan $q \in F(X)$ amelyre $(ap)q = a$. Legyen $c' \in L(a,pq)$ és $c = c'(pq)$. Állitjuk, hogy c ekvivalens a -val. Ha ez nem igaz, létezik olyan $r \in F(X)$, hogy $\lambda_1(a,r) \neq \lambda_2(c,r)$. Ekkor $\lambda_1(a,pqr) = \lambda_1(a,pq) \cdot \lambda_1(a(pq),r) = \lambda_2(c',pq) \cdot \lambda_1(a,r) \neq$

$$\neq \lambda_2(c',pq) \cdot \lambda_2(c,r) = \lambda_2(c',pq) \cdot \lambda_2(c'(pq),r) = \lambda_2(c',pqr).$$

Innen látszik, hogy jóllehet $c' \in L(a,pq)$, nem teljesül $c' \in L(a,pqr)$, tehát $L(a,pqr) \subset L(a,pq)$. Érvényes ugyanis $L(a,pqr) \subseteq L(a,pq)$, mert $\lambda_2(b,pqr) = \lambda_1(a,pqr)$ -ből folyik $\lambda_2(b,pq) = \lambda_1(a,pq)$.

Hasonlóan nyerjük, hogy $L(a,pq) \subseteq L(a,p)$. Igy $L(a,pqr) \subset \subset L(a,p)$, ami azonban ellentmond p választásának. Ezért c valóban ekvivalens a-val, és ezt kellett bizonyitanunk.

Példák

1. A fent gráffal ábrázolt $\mathcal{M}$ automata átmenet- és kimenetfüggvényének táblázata:

δ	a	b	c
0	a	a	a
1	b	b	b

λ	a	b	c
0	0	1	0
1	0	1	1

2. Legyen $b_1, b_2, \ldots$ tetszőleges, rögzitett sorozat, amelynek minden eleme 0 vagy 1. Ha $a_1 \ldots a_n \in F(0,1)$, legyen $(a_1 \ldots a_n)\beta = (a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)$, ahol az összeadást a $B = \langle 0,1\rangle$ Boole-gyürüben értjük. Akkor $\beta : F(0,1) \to F(0,1)$ automata-leképezés.

3. Legyen az $\mathcal{A}$ automata a következő átmenet- és kimenetfüggvénnyel megadva:

δ	a	b	c	d	e
0	b	d	c	d	d
1	c	e	d	d	e

λ	a	b	c	d	e
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1

A b és e, valamint a c és d állapotok ekvivalensek.

4. A 3. példával ekvivalens redukált $\mathcal{B}$ automata így adható meg:

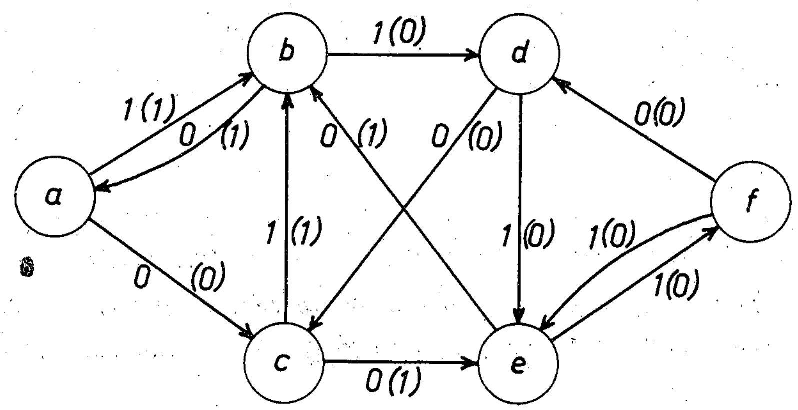
δ	a	b	c
0	b	c	c
1	c	b	c

λ	a	b	c
0	1	0	1
1	0	1	0

Gyakorlatok

1. Nevezzük izomorfnak az $(A, X, Y, \delta_1, \lambda_1)$ és $(B, X, Y, \delta_2, \lambda_2)$ Mealy-automatákat, ha kimenőjel nélküli automatákként izomorfak és van olyan $\varphi: A \to B$ izomorfizmus, hogy bármely $a \in A$-ra és $x \in X$-re $\lambda_2(a\varphi, x) = \lambda_1(a, x)$. Ekvivalens redukált automaták izomorfak.

2. Mutassuk meg, hogy a következő gráffal ábrázolt automata redukált, továbbá ekvivalens az alábbiakban táblázattal megadott automatával:



δ	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
0	c	e	g	i	k	m	o	b	h	e	a	c	c	d	m	f	i
1	b	d	f	h	j	l	n	n	f	q	q	g	f	p	d	n	g

λ	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0

3. Adva van egy fekete doboz, amelyről tudjuk, hogy az általunk ismert $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nemekvivalens minimális véges automaták egyike. Hogyan dönthetjük el egy kisérlettel, hogy fekete dobozunk melyik $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ közül?

4. Mutassuk meg, hogy a fejezet első tételének bizonyításában szereplő $\mathcal{D}$ automata redukált!

58. Automaták szorzata

Legyenek $\mathcal{A}_1 = (A, X, \delta_1), \ldots, \mathcal{A}_n = (A_n, X_n, \delta_n)$ tetszőleges véges automaták. Az $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ automaták szorzatának (vagy Gluskov-féle szorzatának) nevezzük az $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ véges automatát, ha $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, X tetszőleges, és van olyan $\varphi: A \times X \to X_1 \times \ldots \times X_n$ leképezés, hogy $\varphi((a_1, \ldots, a_n), x)$ -et $(x_1, \ldots, x_n)$ -nel jelölve, minden $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$-ra $\delta(a, x) = (a_1 x_1, \ldots, a_n x_n)$.

A φ függvényt e szorzat visszacsatolási függvényének nevezzük. Látjuk, hogy adott automaták szorzata (ellentétben pl. a direkt szorzattal) nem egyértelmüen meghatározott; azonban a bemenő jelek halmazának és a visszacsatolási függvénynek a megadása a szorzatot egyértelmüen meghatározza.

Legyen M véges automatáknak tetszőleges halmaza. Azt mondjuk, hogy M teljes, ha bármely véges automata izomorf M -beli automaták egy alkalmas szorzatának (amelyben egy-egy M -beli automata több példánya is szerepelhet tényezőként) valamely részautomatájával. Tömörebben beszélve, M teljes, ha bármely véges automata beágyazható M -hez tartozó automaták szorzatába.

Szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy véges automaták egy halmaza teljes legyen. Nevezzük az (A, X, δ) automatát teljesnek, ha vannak olyan különböző $0, 1$ állapotai és nem feltétlenül páronként különböző x_1, x_2, x_3, x_4 bemenő jelei, hogy $0x_1 = 0$, $0x_2 = 1$, $1x_3 = 0$, $1x_4 = 1$.

Tétel: Automaták valamely halmaza akkor és csak akkor teljes, ha tartalmaz teljes automatát.

Bizonyitás: Legyen az M halmaz teljes. Tekintsük a $\mathcal{B} = (\langle 0, 1\rangle, \langle x, y\rangle, \delta)$ automatát, ahol δ definiciója: $0x = 1x = 0$, $1y = 0y = 0$. Mivel M teljes, vannak olyan $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ (nem feltétlenül különböző) M-hez tartozó automaták, hogy $\mathcal{B}$ beágyazható egy alkalmas $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_k$ szorzatba. Legyen $\mathcal{A}_i = (A_i, X_i, \delta_i)$ $(i = 1, \dots, k)$ és feleljen meg 0-nak $(a_1, \dots, a_k)$, 1-nek $(b_1, \dots, b_k)$ $(a_i, b_i \in A_i)$, továbbá legyen $\varphi(a_1, \dots, a_k, x) = (x_{11}, \dots, x_{1k})$, $\varphi(a_1, \dots, a_k, y) = (x_{21}, \dots, x_{2k})$, $\varphi(b_1, \dots, b_k, x) = (x_{31}, \dots, x_{32})$, $\varphi(b_1, \dots, b_k, y) = (x_{41}, \dots, x_{4k})$. Akkor bármely i-re $(1 \le i \le k)$ teljesül: $a_i x_{1i} = a_i$, $a_i x_{2i} = b_i$, $b_i x_{3i} = a_i$, $b_i x_{4i} = b_i$. Mivel $0 \ne 1$, azért $(a_1, \dots, a_k) \ne (b_1, \dots, b_k)$ és igy van olyan i, hogy $a_i \ne b_i$. Ekkor az $\mathcal{A}_i \in M$ automata teljes. Valóban, a_i, b_i állapotaira és $x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}$ bemenő jeleire teljesülnek a teljesség feltételei.

Az elegendőség igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy bármely teljes automata önmagában teljes halmazt alkot. Legyen $\mathcal{A} = (A, X, \delta)$ teljes automata $(A = \langle 0, 1, \dots\rangle)$. Tekintsük a tetszőleges $\mathcal{D} = (D, X', \delta')$ véges automatát. Ha $\mathcal{D}$ állapotainak száma nem nagyobb, mint 2^n, minden $d \in D$ állapotnak kölcsönösen egyértelmü módon megfeleltethetünk egy $(d_1, \dots, d_n)$ sorozatot, ahol minden i-re $d_i = 0$, vagy $d_i = 1$. (Más szóval, $\mathcal{D}$ minden állapotának megfeleltetünk egy n-dimenziós Boole-vektort.) Tekintsük $\mathcal{A}$ n számu példányának olyan $\mathcal{A}^n$ szorzatát, amelynél a bemenő jelek halmaza X', továbbá azokra az állapotokra, amelyek n-dimenziós Boole-vektorok (tehát amelyekben minden komponens 0 vagy 1) és minden $x' \in X'$-re a φ visszacsatolási függvényt definiáljuk a következőképpen: ha $dx' (= \delta'(d, x')) = e$ $(d, e \in D)$, akkor $\varphi(d_1, \dots, d_n, x') = (x'_1, \dots, x'_n)$, ahol $i = 1, \dots, n$-re $x'_i = x_1, x_2, x_3$ vagy x_4 (A-nak a teljes automata definiciójában szereplő bemenő jelei!), aszerint, hogy $(d_i, e) = (0,0), (0,1), (1,0)$ vagy $(1,1)$. Itt $(e_1, \dots, e_n)$ az $e \in D$ állapotnak megfelelő Boole-vektort jelenti. Minden más esetben φ értéke tetszőleges X feletti n-dimenziós vektor lehet.

Ekkor $\mathcal{A}^n$ mindazon állapotai, melyek $\mathcal{D}$ valamely állapotának képei, részautomatát alkotnak $\mathcal{A}^n$-ben és a $d \to (d_1, \dots, d_n)$ megfeleltetés $\mathcal{D}$-nek e részautomatára való izomorfizmusa (φ definiciója biztositja e megfeleltetés felcserélhetőségét az X'-beli müveletekkel). A bizonyitás kész.

Tekintsük az $\mathcal{A}_i = (A, X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ Mealy-automatákat $(i = 1, \dots, n)$. Vegyük az (A_i, X_i, δ_i) kimenő jel nélküli automaták valamely szorzatát. Ezt ellátva tetszőleges kimenő jel-halmazzal és tetszőlegesen értelmezett kimenetfüggvénnyel, Mealy-automatát kapunk, melyet az $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ Mealy-automaták szorzatának nevezünk. Részletesen foglalkozunk Mealy-automaták szorzatának egy fontos speciális esetével.

A (C, D, φ) gráf minden olyan csucsát, amely egyetlen élnek sem végpontja, receptornak, az olyan csucsát, amely egyetlen élnek sem kezdőpontja, effektornak, a többi csucsokat pedig centrális csucsoknak nevezzük.

Neuronnak nevezzük a $(B, B^n, B, \delta, \lambda)$ alaku Mealy-automatát, ahol $B = \langle 0, 1\rangle$; n nemnegativ egész szám; bármely a állapotra és x bemenő jelre $\lambda(a, x) = \delta(a, x)$; végül a δ átmenetfüggvény definiciója a következő: vannak olyan $s_1, \dots, s_n$; p valós számok, hogy $\delta(b, (b_1, \dots, b_n)) = 1$ akkor és csak akkor, ha $b_1 s_1 + \dots + b_n s_n \ge p$. Itt p-t küszöbértéknek, s_i-t $(i = 1, \dots, n)$ az i-edik komponens sulyának nevezzük.

Tekintsünk ezután egy olyan $G = (C, D, \varphi)$ gráfot, amelyben a receptorok és effektorok halmaza idegenek, mindkettő véges és egyik sem üres. G minden d csucsának feleltessünk meg egy $\mathcal{F}(d)$ neuront, mégpedig, ha d n számu él végpontja, legyen $\mathcal{F}(d)$ bemenő jeleinek halmaza B^n. Emellett a d-be vezető éleket számozzuk meg az $1, \dots, n$ számokkal. Azt mondjuk, hogy ilyen módon egy neuronhálózatot épitettünk fel. A neuronhálózat tehát egy $(G, \mathcal{F}, \tau)$ alaku hármas, ahol G a mondott gráf, $\mathcal{F}$ a G gráf csucsainak halmazát képezi le az összes neuronok halmazába, végül τ a G gráf éleinek C halmazát képezi le a természetes számok halmazába olyan módon, hogy valahányszor G egy csucsába n számu él vezet, ezeknek az éleknek τ melletti képei éppen az $1, \dots, n \in \mathcal{N}$ számok.

A neuronhálózat - jelenlegi ismereteink szerint - az agy erősen leegyszerüsitett modellje. A definiciójához vezető uton előfordult elnevezéseket az idegélettanból kölcsönöztük.

Legyen $\mathcal{G} = (G, \mathcal{F}, \tau)$ tetszőleges neuronhálózat. A G gráf receptorai halmazának B-be való bármely leképezését $\mathcal{G}$ bemenő jelének, a centrális elemek halmazának B -be való leképezését $\mathcal{G}$ állapotának, végül G effektorai halmazának B -be való leképezését $\mathcal{G}$ kimenő jelének nevezzük. $\mathcal{G}$ egy állapotának megadása szemléletesen annak a megadását jelenti, hogy a G centrális csucsaihoz rendelt (mondhatjuk: csucsaiban elhelyezkedő) neuronok milyen állapotban vannak; hasonlót jelent G receptoraira illetve effektoraira vonatkozóan a bemenő és kimenő jel megadása.

Ha átmenet- és kimenetfüggvényt definiálunk, $\mathcal{G}$ -t véges automatává tettük. Számozzuk meg G centrális csucsait az $1,2,\dots,m$ számokkal és legyen $a=(a_1,\dots,a_m)$ $(a_i=0$ vagy $a_i=1)$ $\mathcal{G}$-nek egy állapota (ez azt jelenti, hogy minden i -re az i -edik centrális csucs az a_i állapotban van). Hasonlóan, legyen $X=(x_1,\dots,x_\ell)$ $\mathcal{G}$ -nek egy bemenő jele (a receptor-csucsokban elhelyezkedő neuronok állapotainak sorozata). Jelölje δ G definiálandó átmenetfüggvényét. Ekkor $\delta((a_1,\dots,a_m),(x_1,\dots,x_\ell))=(b_1,\dots,b_m)$, ahol minden i-re b_i -t a következő módon nyerjük:

1) tekintjük az i-edik csucsba vezető $i_1,\dots,i_{k_i}$ -val megjelölt éleket,

2) vesszük az ezek kezdőpontjaiban elhelyezkedő neuronok (köztük lehetnek receptorokhoz rendelt neuronok is!) állapotait; legyenek ezek $a'_{i_1},\dots,a'_{i_{k_i}}$,

3) megvizsgáljuk, érvényes-e az i -edik csucsban elhelyezkedő neuron $s_1,\dots,s_k$ sulyaira és p küszöbértékére $a'_{i_1}s_1+\dots+a'_{i_{k_i}}s_k\geq p$. Ha igen, $b_i=1$; különben $b_i=0$.

Szemléletesen, minden neuron a hozzá vezető éleken keresztül kapja bemenő jelének komponenseit, és egy ilyen komponens nem más, mint a megfelelő él kezdőpontjában levő neuron állapota (vagy - ami a neuron definiciója szerint ugyanazt jelenti - kimenő jele).

Definiáljuk most a kimenetfüggvényt. $\lambda(a,x)$ legyen G effektorai halmazának alábbi B -be való leképezése. Ha d effektora G -nek, vegyük azokat az éleket, amelyek d -be vezetnek. A kezdőpontjukban elhelyezkedő bármely neuron lehet centrális, vagy receptor-neuron. Az első esetben tekintsük a neuronnak azt az állapotát, amellyel $\delta(a,x)$ -ben szerepel, a második esetben meg azt, amellyel x -ben szerepel. Legyenek ezek az állapotok - a d -be vezető élek számozása szerinti sorrendben - $e'_1,\dots,e'_k$. Akkor a d effektor képe legyen 1, ha $e'_1s_1+\dots+e'_ks_k\geq p$ (itt $s_1,\dots,s_k,p$ az $\mathcal{F}(d)$ neuron sulyait ill. küszöbértékét jelöli), és legyen 0 különben. Ezzel bevezettük $\mathcal{G}$ kimenetfüggvényét. Igy tehát neuronhálózatunk véges automata.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathcal{G}$ neuronhálózat centrális neuronjainak (vagyis a centrális csucsokhoz rendelt neuronjainak) Gluskov-féle szorzata. A Mealy-automaták szorzatának definiciója alapján ehhez csak azt kell megfigyelni, hogy $\mathcal{G}$ állapothalmaza valóban a centrális neuronok állapothalmazainak szorzata; továbbá meg kell adnunk az alkalmas visszacsatolási függvényt. A neuronhálózat átmenetfüggvényének definiciójában használt jelölésekkel élve, legyen $\varphi(a,x)=(c_1,\dots,c_m)$, ahol $c_i=(a_{i_1},\dots,a_{i_{k_i}})$ $(i=1,\dots,m)$. A definiciókat egybevetve látjuk, hogy ez a visszacsatolási függvény valóban $\mathcal{G}$ átmenetfüggvényét eredményezi.

Nevezzük a $\Upsilon: F(X)\to F(Y)$ leképezést véges automataleképezésnek, ha van olyan véges automata, amelynek valamely állapota Υ -t indukálja. Ha a $\mathcal{G}$ neuronhálózatnak ℓ számu receptora és j számu effektora van, továbbá X -nek legfeljebb 2^ℓ, Y -nak legfeljebb 2^j eleme van, akkor X és Y elemeinek kölcsönösen egyértelmü módon megfeleltethetjük $\mathcal{G}$ bizonyos bemenő ill. kimenő jeleit. Ily módon beszélhetünk arról, hogy egy $\mathcal{G}$ neuronhálózat valamely állapota a Υ leképezést indukálja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy Υ előállitható $\mathcal{G}$ -ben.

Tétel: Bármely véges automataleképezés előállitható egy neuronhálózatban.

Bizonyitás: Legyen Υ véges automataleképezés. Létezik olyan egy elem által generált $\mathcal{A}=(A,X,Y,\delta,\lambda)$ Mealy-automata, amelyben a generátorelemül szolgáló állapot Υ -t indukálja. Ilyet Mealy-automatát kapunk, ha tekintünk tetszőleges olyan Mealy-automatát, amelynek a állapota Υ -t indukálja, majd állapotai közül csak az $a_1q\,(q\in F(X))$ alakuakat tartjuk meg (ti. azokat, amelyekbe automatánk a_1 -ből valamely bemenő szóval átvihető), végül kimenetfüggvénynek vesszük az eredeti kimenetfüggvénynek az uj állapothalmazra való restrikcióját.

Megadunk egy olyan $\mathcal{G}$ neuronhálózatot, amelynek - mint Mealy-automatának - egy alkalmas állapota Υ -t indukálja. Ehhez először leirjuk azt a $G=(C,D,\varphi)$ gráfot, amelyre a keresett neuronhálózat épül. Legyen X,Y és $A\times X$ minden egyes eleméhez, valamint az a_1 állapothoz kölcsönösen egyértelmüen hozzárendelve G -nek egy csucsa; a tárgyalás egyszerüsitése érdekében itt feltettük, hogy X, Y és $A\times X$ páronként idegenek. Minden csucsot azzal az elemmel (vagy elempárral) jelöltünk, amelyhez hozzárendeltük. Bármely csucsból bármely csucsba legfeljebb egy él vezet. Az X elemeihez rendelt csucsok lesznek a receptorok; $x\in X$ -ből él vezet az összes (a,x) $(a\in A)$ csucsokba és csak ezekbe. Az Y elemeihez rendelt csucsok lesznek az effektorok; $(a,x)\in A\times X$-ből akkor és csak akkor vezet él $y\in Y$ -ba, ha $\lambda(a,x)=y$. Az $A\times X$ halmaz elemeihez rendelt csucsok centrálisak lesznek; ha $x_0\in X$, (a,x_0)-ből él vezet minden $(\delta(a,x_0),x)$ csucsba, ahol $x\in X$, és csak ezekbe. Az a_1 csucs is centrális; belőle él vezet minden (a_1,x) $(x\in X)$ alaku párba, valamint önmagába. Ezután megadjuk a G gráf csucsaiban elhelyezkedő neuronokhoz tartozó sulyokat és küszöbértéket. A centrális neuronoknál minden komponens sulya legyen 1/2, az effektorneuronoknál pedig 1; továbbá bármely neuron küszöbértéke legyen 1.

Leirtuk a $\mathcal{G}$ neuronhálózatot; most feleltessük meg minden $x \in X$ -nek $\mathcal{G}$ azon bemenő jelét, melynél az x csucsban levő $\mathcal{F}(x)$ neuron állapota 1, az összes többi receptorneuron állapota 0. Hasonlóan, feleltessük meg minden $y \in Y$ -nak $\mathcal{G}$ azon kimenő jelét, melynél az $\mathcal{F}(y)$ neuron állapota 1, az összes többi effektor-neuronoké 0. Tekintsük végül $\mathcal{G}$ -nek azt az állapotát, melyben az $\mathcal{F}(a_1)$ neuron állapota 1, az összes többi centrális neuroné 0. Megmutatjuk, hogy ez az állapot a Υ leképezést indukálja. Egyszerüség kedvéért jelölje z a $\mathcal{G}$ neuronhálózatnak azt az állapotát, melynél a centrális neuronok közül egyedül z van az 1 állapotban.

Ha az a_1 állapotban $\mathcal{G}$ az x_1 bemenő jelet kapja, akkor $\mathcal{G}$ az átmenetfüggvény definiciója szerint átmegy az (a_1, x_1) állapotba és a kimenetfüggvény definiciója szerint kibocsájtja a $\lambda(a_1, x_1) = x_1\Upsilon$ kimenő jelet. Ha ekkor $\mathcal{G}$ az x_2 bemenő jelet kapja, átmegy a $(\delta(a_1,x_1),x_2) = (a_1x_1, x_2)$ állapotba és kibocsátja a $\lambda(a_1x_1,x_2) = x_2\Upsilon_{x_1}$ kimenő jelet; de $x_1\Upsilon \cdot x_2\Upsilon_{x_1} = (x_1x_2)\Upsilon$. Ha már $\mathcal{G}$ eljutott az $(ax_1 \dots x_{i-1}, x_i)$ állapotba, és eközben kibocsájtotta az $(x_1 \dots x_i)\Upsilon$ szót, majd az x_{i+1} bemenő jelet kapja, akkor átmegy a $(ax_1 \dots x_{i-1}x_i, x_{i+1})$ állapotba és a $\lambda(ax_1 \dots x_{i-1}x_i, x_{i+1}) =$ $= x_{i+1}\Upsilon_{x_1 \dots x_i}$ jelet adja ki. Mivel $(x_1 \dots x_i\Upsilon) \cdot x_{i+1}\Upsilon_{x_1 \dots x_i} =$ $= (x_1 \dots x_i x_{i+1})\Upsilon$, indukcióval beláttuk, hogy $\mathcal{G}$ a_1 állapota valóban a Υ leképezést indukálja. A bizonyitás kész.

Példák

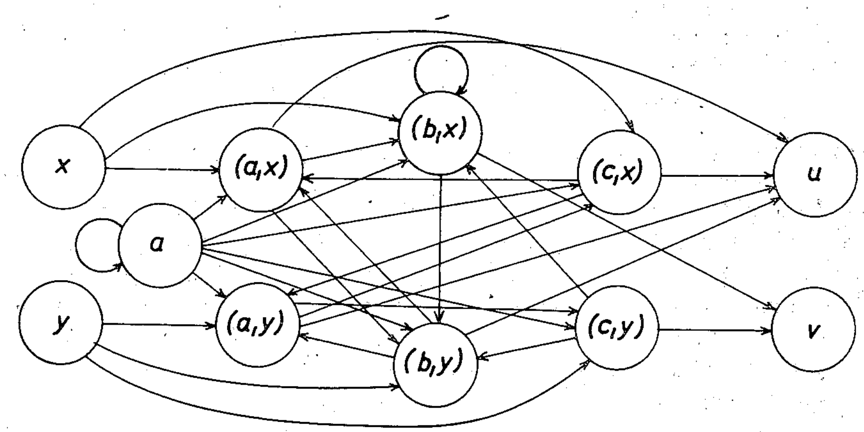
1. Legyenek $\mathcal{A} = (A, X, X, \delta_1, \lambda_1)$ és $\mathcal{B} = (B, X, X, \delta_2, \lambda_2)$ Mealy-automaták. Tekintsük $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azon szorzatát, melynél a bemenő jelek halmaza X, a visszacsatolási függvény $\varphi((a,b),x) = (x_1, \lambda_1(a,x))$, a kimenő jelek halmaza X, végül a kimenetfüggvény $\lambda((a,b),x) = \lambda_2(b, \lambda_1(a,x))$. Az ilyen szorzatot $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ soros (vagy kaszkád-) egyesitésének nevezzük, mivel ugy müködik, mintha az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ automatákat egymás után kapcsoltuk volna.

2.

δ	a	b	c
x	b	b	a
y	c	a	b

λ	a	b	c
x	u	v	u
y	u	u	v

Ennek az automatának az a állapota által indukált leképezés az alábbi neuronhálózatban állitható elő:



Gyakorlatok

1. A fejezet első tétele elegendőség-bizonyitásának ötletét felhasználva mutassuk meg, hogy bármely k állapotu és ℓ bemenő jelü automata, ahol $k \leq 2^n$, $\ell \leq 2^p$, megadható n számu $n+p$ -változós Boole-függvény segitségével!

2. Minden $\delta(x,y)$ kétváltozós Boole-függvény tekinthető egy $(\langle 0,1\rangle, \langle 0,1\rangle, \delta)$ alaku automata átmenetfüggvényének. Mely Boole-függvényekből kapunk igy teljes automatát?

3. Állitsuk elő az előző fejezet végén vizsgált $\mathcal{M}$ automatát az e fejezet első tételében definiált $\mathcal{B}$ teljes automata egy alkalmas Gluskov-féle hatványának részautomatájaként!

4. Állitsuk elő neuronhálózatban az $\mathcal{M}$ automata c állapota által indukált leképezést!

59. Turing-gép

Legyen X véges halmaz, amelyben ki van jelölve egy x_0 elem. Szalagnak (részletesebben: X feletti szalagnak) nevezzük az egész számok $\mathfrak{J}$ halmazának bármely olyan X-be való leképezését, amelynél véges számu kivétellel minden szám képe x_0. Szemléletesen az ilyen leképezés valóban mindkét irányban végtelen szalagként képzelhető el, amely egyenlő hosszuságu rekeszekre van felosztva, s véges számu rekeszbe X valamely x_0-tól különböző eleme kerül, mig a többi rekeszek üresen maradnak. Ennek megfelelően x_0 helyett 0-t fogunk irni és 0-t üres jelnek nevezzük. Az $F(X)$ szabad félcsoport elemeit is tekinthetjük szalagoknak: $x_1 \dots x_n$ az a leképezés, amelynél $i \to x_i$, ha $1 \leq i \leq n$, és $i \to 0$ másküönben; $F(X)$ egységeleme pedig az üres szalag.

Tekintsük az $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ egy elem által generált véges Mealy-automatát (generátorelemét jelölje a_0), ahol ki van jelölve A-nak egy H részhalmaza, a "stop-állapotok" halmaza, és a kimenő jelek halmaza $Y = X \times \langle -1, 0, 1 \rangle$. Az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ párt Turing-gépnek nevezzük. Általánosabban, $\mathfrak{J}$ helyett tekinthetünk tetszőleges S félcsoportot, $\langle -1, 0, 1 \rangle$ helyett pedig S-nek egy generátorrendszerét; mi azonban csak az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ alaku Turing-gépeket fogjuk vizsgálni.

Ha a szabad félcsoportok elemeit szalagoknak tekintjük, akkor az automatákat bizonyos fajta szalagok átalakitására, ill. ilyen szalagok halmazainak felismerésére szolgáló strukturáknak kell tekintenünk. Hasonlóképpen a Turing-gépek is szalagok átalakitására és halmazaik felismerésére szolgáló strukturák; az átalakitás és felismerés módja azonban eltér a Mealy- és a közönséges automatákétól: a Turing-gépek nagyobb lehetőségekkel rendelkeznek. Hogy a mondottakat pontositsuk, leirjuk az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ Turing-gép müködését.

Legyen adva egy φ szalag és legyen i_0 a legkisebb olyan egész szám, amelyre $\varphi(i_0) \neq 0$ (vagyis a szalagon a bal szélső olyan rekesz, amely nem üres). Az $\mathcal{A}$ automata az a_0 állapotban van és a $\varphi(i_0)$ bemenő jelet kapja, vagyis leolvassa az i rekesz tartalmát, amelynek hatására átmegy a $\delta(a_0, \varphi(i_0))$ állapotba. Kimenő jele $\lambda(a_0, \varphi(i_0)) = (x, j)$, ahol $x \in X$, $j \in \langle -1, 0, 1 \rangle$; a kimenő jel ugy jelentkezik, hogy a szalagra $\varphi(i_0)$ helyébe x kerül (a gép törli az i_0 rekesz tartalmát és uj jelet ir e rekeszbe), továbbá, ha $j = -1$, az $\mathcal{A}$ automata a $\varphi(i_0 - 1)$ bemenő jelet kapja (a közvetlenül balra eső rekeszt kezdi vizsgálni); ha $j = 0$, az x bemenő jelet kapja (továbbra is az i_0 rekeszt vizsgálja); ha pedig $j = 1$, akkor a $\varphi(i_0 + 1)$ bemenő jelet kapja. Eközben, ha $\delta(x_0, \varphi(i_0))$ stop-állapot, akkor a Turing-gép müködése befejeződött (a gép megállt az $i_0 - 1$, i_0 vagy $i_0 + 1$ rekesznél). Ha $\delta(x_0, \varphi(i_0))$ nem stop-állapot, akkor Turing-gépünk a kapott bemenő-jel hatására uj állapotba megy át, a vizsgált rekeszbe uj jelt ir be (az uj jel megegyezhet a korábbival, és lehet az üres jel is) s ismét egy további rekeszt kezd vizsgálni kimenetfüggvényének

megfelelően stb. A gép megáll, amikor először stop-állapotba kerül; természetesen létezhet olyan szalag, amelyen a gép vég nélkül folytatja müködését. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a gép az adott szalagra nem alkalmazható. Itt jegyezzük meg, hogy nem szükséges megkülönböztetnünk az egymásból eltolással keletkező φ és Υ szalagokat (amelyekre ti. van olyan $k \in \mathfrak{J}$ hogy minden i-re $\varphi(i) = \Upsilon(i+k)$, mert, mint látjuk, a rekeszekben levő jelek sorozatának eltolása a gép müködését nem változtatja).

Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ Turing-gép müködésének befejezésekor az eredeti φ szalag helyett a φ' szalagot kapjuk. Világos, hogy $\varphi \to \varphi'$ az összes szalagok halmazából ugyanabba a halmazba való leképezés. Általában, jelölje $X^{\mathfrak{J}}$ az összes X feletti szalagok halmazát és legyen $W \subseteq X^{\mathfrak{J}}$. A $\lambda = W \to X^{\mathfrak{J}}$ leképezést kiszámitható leképezésnek[1/] nevezzük, ha létezik olyan $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ Turing-gép, amely minden $\beta \in W$-re a β szalagot a $\beta' = \beta\lambda$ szalagba viszi át. Azt mondjuk továbbá, hogy az X feletti szalagok U halmaza kiszámitható halmaz, ha van olyan $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ Turing-gép és $\mathcal{A}$-nak olyan a stop-állapota, hogy $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ bármely $\varphi \in X^{\mathfrak{J}}$ szalagon müködtetve akkor és csak akkor áll meg az a stop-állapotban, ha $\varphi \in U$.

Minden véges automata-leképezés kiszámitható leképezés. Valóban, legyen $\mathcal{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ véges Mealy-automata, amelynek $a_0 \in A$ állapota a Υ leképezést indukálja. Feltehetjük, hogy a_0 generátoreleme $\mathcal{A}$-nak. Vegyük azt az $\mathcal{A}'$ automatát, amelynek állapothalmaza $A' = A \cup \langle s \rangle$, bemenő jeleinek halmaza $X' = X \cup Y \cup \langle 0 \rangle$, kimenő jeleinek halmaza $Y' = X' \times \langle -1, 0, 1 \rangle$; δ' átmenetfüggvényének értéke bármely $a \in A$, $x \in X$ párra $\delta(a, x)$, minden $a' \in A'$-re $\delta'(a', 0) = s$, a többi állapot-bemenő jel párra tetszőleges; λ' kimenetfüggvényének értéke bármely $a \in A$, $x \in X$ párra $(\lambda(a, x), 1)$, minden $a' \in A'$-re $\lambda'(a', 0) = (0, 0)$, a többi állapot-bemenő jel párra tetszőleges. Ha az $(\mathcal{A}', \mathfrak{J})$ Turing-gép egyetlen stop-állapota s, akkor ez a Turing-gép minden olyan szalagot, amely X feletti szó, ugyanabba az Y feletti szóba visz át, mint az $\mathcal{A}$ Mealy-automata a_0 állapota által indukált leképezés.

Bármely szabad félcsoportnak létezik olyan kiszámitható leképezése, amely nem véges automata-leképezés. Vegyük pl. azt az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ Turing-gépet, amelynél $\mathcal{A}$-nak két állapota van (a kezdő és a stop-állapot); $\mathcal{A}$ bármely bemenő jel hatására átmegy a stop-állapotba, a vizsgált rekesz tartalmát 0-ra változtatja és megáll. Világos, hogy az $(\mathcal{A}, \mathfrak{J})$ által megvalósitott leképezés abban áll, hogy minden szó első betüje eltünik; ez a

---

1/ Ezt az elnevezést rövidség kedvéért használjuk. Pontosabban "értelmezési tartományából kiszámitható leképezés"-ről kell beszélnünk.

kiszámitható leképezés tehát nem hagyja változatlanul a szavak hosszuságát és igy nem automata-leképezés.

A tapasztalat azt mutatja, hogy valahányszor λ az összes X feletti szalagok halmazának önmagába való olyan leképezése, amely "effektiven megadható" (azaz van olyan módszer, amellyel bármely szalagra meg tudjuk mondani, hogy mi a leképezés melletti képe), akkor létezik olyan Turing-gép, amely éppen a λ leképezést valósitja meg.

Az "effektiv megadhatóság" nem pontos matematikai fogalom a felhasználható módszerek áttekinthetetlensége miatt. Ezért a következő hipotézis matematikai eszközökkel nem bizonyitható.

Turing-tézis: Minden effektiven megadható leképezés megvalósitható valamely Turing-gép által. Igy adott halmaz feletti összes szalagok halmazának az önmagába való effektiven megadható leképezései ugyanazok, mint a kiszámitható leképezései[1/].

Ha az olyan Turing-gépeket, amelyek izomorfak, azaz csak jelölésekben térnek el, nem különböztetjük meg egymástól, az összes Turing-gépeket jól meghatározott módon egy végtelen sorozatba rendezhetjük (a sorozat elején szerepelnek pl. azok, amelyeknél az állapotok, a bemenő és kimenő jelek számainak összege 3 - ezek száma véges -, majd amelyeknél ez az összeg 4 stb.). Ezután tetszőleges, legalább kételemü X esetén minden egyes Turing-géphez hozzárendelhetünk egy szót (pl. az n -edik Turing-géphez az x^n szót, ahol $x \neq 0$). Tekintsük mostmár azt a $\lambda : W \rightarrow X^{\mathfrak{J}}$ $(W \subseteq X^{\mathfrak{J}})$ leképezést, amely minden $\ldots 00x^k0p00,\ldots$ X feletti szalaghoz a $\ldots 00p00\ldots$ szalagnak a k -adik Turing-géppel megvalósitható leképezés melletti képét rendeli. Ez a leképezés effektiven megadható, ezért - a Turing-tézis szerint - van olyan Turing-gép, amely megvalósitja. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy létezik olyan Turing-gép, amely b á r m e l y Turing-gépet képes utánozni. Az ilyen gépet univerzális Turing-gépnek nevezzük. Univerzális Turing-gép létezése teljes szigorusággal is bizonyitható; természetesen a bizonyitás nem egyszerü.

Legyen $(\mathfrak{A},\mathfrak{J})$ univerzális Turing-gép, ahol $\mathfrak{A}$ generátoreleme a_0. Mivel $(\mathfrak{A},\mathfrak{J})$ müködését az $\mathfrak{A}$ Mealy-automata a_0 állapota által indukált leképezés, valamint $\mathfrak{A}$ stop-állapotai teljesen meghatározzák, másrészt minden véges automata-leképezés előállitható egy neuronhálózatban, azért létezik olyan neuronhálózat, amely - amennyiben bizonyos állapotaiban a megfelelő kimenő jel kibocsájtása után megszünteti müködését - szalagok bármely effektiven megadható leképezését képes megvalósitani.

[1/] Turing-tézis helyett szokás Church-tézisről is beszélni.

Példák

1. Legyenek az $(\mathfrak{A},\mathfrak{J})$ Turing-gép bemenő jelei $x,0,y$, állapotai a,b,c,d (a kezdőállapot a , a stop-állapot d); átmenet- és kimenetfüggvénye:

δ	a	b	c	d
x	c	b	c	-
0	a	a	b	-
y	d	b	c	-

λ	a	b	c	d
x	(0,1)	(x,-1)	(x,1)	-
0	(0,1)	(0,1)	(x,0)	-
y	(0,0)	(y,-1)	(y,1)	-

(az üresen hagyott helyen tetszőleges állapot, ill. kimenő jel állhat). Ez a Turing-gép bármely $m,n \in \mathcal{N}$ esetén a $\ldots 00x^m y x^n 00\ldots$ szalagot az $\ldots 00\,x^{m+n}\,00\ldots$ szalagba viszi át (vagyis természetes számok összeadását végzi), s emellett a (nemüres) jelsorozat bal szélén áll meg.

2. A reguláris események kiszámitható halmazok. Ha ugyanis az E eseményt az $\mathfrak{A}=(A,X,Y,\delta,\lambda)$ automata az a_0 állapotból kiindulva $B \subseteq A$ állapothalmazával felismeri, akkor vegyük az $\mathfrak{A}$ -nak a_0 állapota által indukált leképezést megvalósitó $\mathfrak{A}'$ Turing-gépet azzal a módositással, hogy az s stop-állapoton kivül egy további s' stop-állapotot vesztünk fel, amelyre $\delta(b, 0) = s'$ vagy s, aszerint, hogy b B -n kivül vagy B -ben van. Ez az $\mathfrak{A}'$ Turing-gép s stop-állapotával felismeri az E eseményt.

Gyakorlatok

1. Adjunk meg olyan Turing-gépet, amely a $\ldots 00x^k00\ldots$ szalagot a $\ldots 00x^{2k}00\ldots$ szalagba viszi át!

2. Adjunk meg olyan Turing-gépet, amely az m és n természetes számokról el tudja dönteni, hogy rájuk az $m<n$, $m=n$, $m>n$ lehetőségek melyike teljesül (pl. ugy, hogy a keresett $\mathfrak{A}$ gépnek három stop-állapota van: s_1, s_2, s_3 , és a $\ldots 00x^m z x^n 00\ldots$ szalagra alkalmazva $\mathfrak{A}$ az s_1 (ill. s_2, s_3) állapotban áll meg, ha $m<n$ (ill. $m=n$, $m>n$).

3. Létezik olyan kiszámitható esemény, amely nem kontextus-mentes nyelv (l. az 56. fejezetet!).

60. Mozaik-struktúra

Tekintsük a tetszőleges $\mathcal{A} = (A, A^4, \delta)$ véges automatát. Legyen kijelölve A -ban egy 0 "nyugalmi állapot", amelyre teljesül

$$(*) \qquad \delta\,(0,(0,0,0,0)) = 0.$$

Az egész számpárok $\mathcal{I}^2$ halmazának bármely A -ba való olyan leképezését, amelynél csak véges számu $i,j \in \mathcal{I}^2$ párra $\varphi(i,j) \neq 0$, ($\mathcal{A}$ feletti) konfigurációnak nevezzük, magát az $(\mathcal{A}, \mathcal{I}^2)$ párt pedig mozaikstrukturának hivjuk.

Szemléletesen a mozaik-struktura nem más, mint az $\mathcal{A}$ automata végtelen sok példányából álló rendszer, amely példányok a sik összes egész koordinátákkal rendelkező rácspontjaiban helyezkednek el; a konfiguráció pedig minden egyes automata egyidejü állapotának olyan megadása, hogy véges számu kivétellel minden automata nyugalmi állapotban van. Általánosabban, $\mathcal{I}^2$ helyett tekinthetnénk tetszőleges olyan gráfot, amelynek minden csucsába n számu él vezet, s ekkor A^4 helyett A^n szerepelne $\mathcal{A}$ bemenő jeleinek halmazaként; mi azonban csak az $(\mathcal{A}, \mathcal{I}^2)$ alaku mozaikstrukturákkal foglalkozunk.

Két konfigurációt nem tekintünk különbözőnek, ha egymásból eltolással nyerhetők; tehát $\varphi = \Psi$, ha van olyan $(k,\ell) \in \mathcal{I}^2$, hogy minden $(i,j) \in \mathcal{I}^2$-re $\varphi(i,j) = \Psi\,(i+k, j+\ell)$. Ha egy φ konfiguráció nyugalmitól különböző állapotban levő összes automatái befoglalhatók egy n oldalu négyzetbe (azaz van olyan $(i,j) \in \mathcal{I}^2$, hogy $\varphi(k,\ell) = 0$, hacsak nem $i \le k < i+n$ és $j \le \ell < j+n$, akkor azt mondjuk, hogy φ n -konfiguráció. Világos, hogy minden konfiguráció n -konfiguráció valamely n -re; továbbá, ha φ n -konfiguráció, akkor m -konfiguráció is minden n -nél nagyobb m -re.

Minden φ konfigurációnak feleltessük meg azt a φ' konfigurációt, amelynek definiciója: $\varphi'(i,j) = \delta\,(\varphi\,(i,j),(\varphi\,(i,j+1), \varphi\,(i+1,j), \varphi\,(i,j-1), \varphi\,(i-1,j)))$. Másképpen beszélve, az (i,j) rácspontban levő automata állapota a φ' konfigurációban attól és csak attól függ, hogy ez az automata és négy közvetlen szomszédja mely állapotban voltak a φ konfigurációban. Ezt a "függésmódot" a δ átmenetfüggvény adja meg. A φ' konfigurációt φ képének vagy követőjének nevezzük. Világos, hogy φ' valóban konfiguráció: $(*)$ szerint az (i,j) rácspontban levő automata a φ' konfigurációban csak akkor lehet a nyugalmitól különböző állapotban, ha vagy ő, vagy valamelyik közvetlen szomszédja a φ konfigurációban a nyugalmitól különböző állapotban volt; az ilyen (i,j) -k száma azonban véges.

Minden konfigurációhoz hozzárendelve követőjét, az összes konfigurációk halmazának önmagába való leképezését kapjuk. Ezt a leképezést mozaikleképezésnek nevezzük. A $(*)$ összefüggésből következik, hogy minden $(n-2)$ -konfiguráció követője n -konfiguráció.

Legyen φ tetszőleges konfiguráció. Restringáljuk egy Q négyzetre; majd az igy kapott leképezést folytassuk $\mathcal{I}^2$ -re ugy, hogy a keletkező φ' konfigurációban minden $(i,j) \notin Q$ -ra $\varphi'(i,j) = 0$ legyen. Azt mondjuk ekkor, hogy φ' részkonfigurációja (vagy röviden: része) φ -nek. Tekintsünk egy mozaikleképezést; ha a $\bar{\varphi}$ konfigurációhoz létezik olyan φ, hogy $\bar{\varphi}$ része φ követőjének, akkor $\bar{\varphi}$-t képkonfigurációnak nevezzük az adott mozaikleképezésre nézve. Nevezzük gyengén epimorfnak a mozaikleképezést, ha rá nézve minden konfiguráció képkonfiguráció.

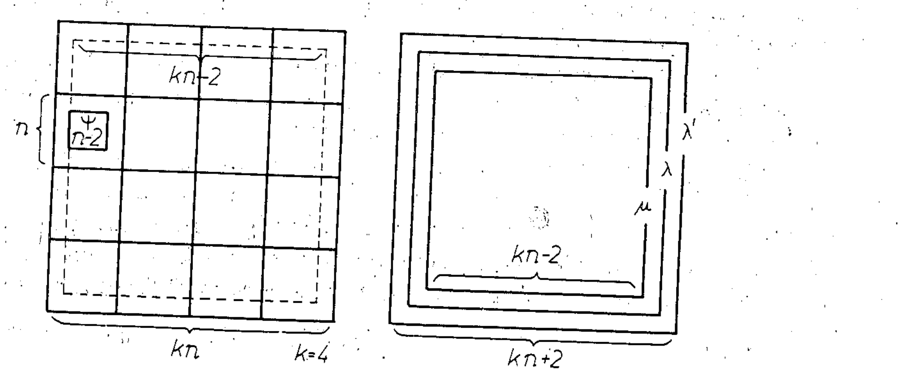
Tétel (Moore-Myhill): Mozaikleképezés akkor és csak akkor monomorf, ha gyengén epimorf.

Bizonyitás: Szükségünk lesz a következő tényre: ha $p, n > 1$ (p, n valós), létezik olyan pozitiv egész k, amelyre

$$(**) \qquad (p^{n^2} - 1)^{k^2} < p^{(kn-2)^2}.$$

Valóban, ha k elég nagy, akkor $\log_p\,(p^{n^2}/(p^{n^2}-1)) > 4n/k - 4/k^2 > 0$, ahonnan $p^{n^2}/(p^{n^2}-1) > p^{4n/k - 4/k^2}$. Átrendezve $p^{(n-2/k)^2} > p^{n^2} - 1$ és mindkét oldalt k^2 -edik hatványra emelve nyerjük a $(**)$ egyenlőtlenséget. Jelölje p a továbbiakban A elemeinek számát.

Tegyük fel először, hogy a mozaikleképezés nem gyengén epimorf, de monomorf. Ekkor létezik olyan $n (\in \mathcal{N})$ hogy valamely Ψ n -konfiguráció nem képkonfiguráció. Az összes különböző n -konfigurációk száma p^{n^2}, tehát az összes különböző n -képkonfigurációk száma legfeljebb $p^{n^2} - 1$. Tekintsük most az összes kn -konfigurációkat. Ezek mindegyike k^2 számu n -konfigurációra bomlik (l. az ábrát). Ha egy kn -konfiguráció felbontásában szerepel Ψ, mint n -konfiguráció, akkor ez a kn -konfiguráció nem képkonfiguráció (különben Ψ, mint $(n-2)$ -konfiguráció, maga is képkonfiguráció lenne). Igy a kn -képkonfigurációk száma legfeljebb $(p^{n^2} - 1)^{k^2}$.



Másrészt a különböző $(kn-2)$ -konfigurációk száma $p^{(kn-2)^2}$. A mozaikleképezés monomorf; ezért ezeknek a $(kn-2)$-konfigurációknak a képei különböző kn -konfigurációk, és természetesen mind képkonfigurációk. Eszerint a kn -képkonfigurációk száma legalább $p^{(kn-2)^2}$. Ellentmondásba kerültünk a $(**)$ összefüggéssel.

Tegyük fel most, hogy a mozaikleképezés nem monomorf, de gyengén epimorf. Ekkor létezik olyan n, hogy valamely φ és Ψ $(n-4)$-konfigurációk különbözők, de képeik ugyanazok. Mind φ és Ψ, mind képeik tekinthetők n -konfigurációknak. Nevezzünk két n -konfigurációt ekvivalensnek, ha képeik megegyeznek, és maguk legfeljebb a középükön elhelyezkedő $(n-4)$-konfigurációkban különböznek. Mivel φ és Ψ különböző, de ekvivalens n -konfigurációk, az ekvivalenciaosztályok száma legfeljebb $p^{n^2}-1$. A kn -konfigurációkat n-konfigurációkra bontjuk és két kn -konfigurációt akkor nevezünk ekvivalensnek, ha a bennük szereplő egymásnak megfelelő n -konfigurációk ekvivalensek. Ezeknek az ekvivalenciaosztályoknak a száma legfeljebb $(p^{n^2}-1)^{k^2}$. Két ekvivalens kn -konfiguráció képe megegyezik; másrészt minden μ $(kn-2)$-konfiguráció képkonfiguráció, és mint ilyen, befoglalható valamely λ kn -konfiguráció λ' képébe (l. az ábrát). Igy a különböző $(kn-2)$ -konfigurációk száma legfeljebb $(p^{n^2}-1)^{k^2}$.

Másrészt a különböző $(kn-2)$ -konfigurációk száma pontosan $p^{(kn-2)^2}$, s ezzel ismét ellentmondásba kerültünk a $(**)$ összefüggéssel. A bizonyitás kész.

A bizonyitott tételnek érdekes szemléletes tartalma van. A konfigurációk tekinthetők a mozaik-struktura állapotainak, a konfigurációk képei pedig időbeni követőiknek. Ezt figyelembe véve, a tétel igy is fogalmazható:

Bármely mozaik-strukturára a következő két állitás ugyanazt jelenti: 1) Van olyan állapot, amelyből a megelőző állapotra nem lehet egyértelműen visszakövetkeztetni. 2) Van olyan állapot, amely egyetlen másik állapotból sem jöhet létre.

A mozaik-strukturákra vonatkozó vizsgálatok közül a legjelentősebb Neumann Jánosé volt, aki megadott olyan mozaik-strukturát, amelyben van önmagát reprodukáló konfiguráció (azaz olyan φ konfiguráció, melyre a mozaikleképezés megfelelő hatványát alkalmazva, két - egymás közelében elhelyezkedő - példányából álló konfigurációt kapunk), és ez az önreprodukció rendelkezik a magas szervezettségü anyag önreprodukciójának (pl. élőlények szaporodása) néhány fontos vonásával. Kevésbé tartalmas példát olyan mozaik-strukturára, amelyben önreprodukció lehetséges, könnyebben nyerhetünk: ilyen pl. a $((B, B^4, \delta), \mathcal{T}^2)$ mozaik-struktura,

ahol $B = \langle 0,1 \rangle$, mig $\delta(b, (b_1, b_2, b_3, b_4)) = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ (itt "+" Boole-gyürü-összeadást jelent; $b, b_1, \ldots, b_4 \in B$). Nem nehéz utánagondolni, hogy a $\varphi(1,0) = \varphi(0,1) = \varphi(-1,0) = \varphi(0,-1) = 1$, különben $\varphi(i,k) = 0$ egyenlőségekkel definiált φ konfigurációra a mozaikleképezés negyedik hatványát alkalmazva, φ négy példányát részként tartalmazó konfigurációt kapunk.

Példák

1. Legyen $A = \langle 0,1 \rangle$; $\delta(a_1, (a_2, a_3, a_4, a_5)) = 1$, ha $a_1 + \ldots + a_5 \geq 1$. Akkor φ nem képkonfiguráció, továbbá Ψ és χ képe megegyezik.

φ

	1	

Ψ

1			1
		1	
	1		
1			1

χ

1			1
	1	1	
1			1

2. Legyen $A = \langle 0,1,2 \rangle$; jelölje τ az $(1,2)$ transzpoziciót; $\delta(a_1, (a_2, a_3, a_4, a_5)) = a_5 \tau$. Ekkor a mozaikleképezés monomorf és epimorf.

Gyakorlatok

1. Vigyük át e fejezet fogalmait és eredményeit arra az esetre, amikor az $\mathcal{A}$ automata példányai az egyenesen, az egész számokat ábrázoló pontokban helyezkednek el!

2. Igaz-e, hogy minden $(n-2)$ -képkonfiguráció valamely n -konfiguráció képe?

3. Félcsoportot alkotnak-e az összes mozaik-leképezések a szorzásra nézve?

4. Helyettesithetjük-e a Moore-Myhill-tétel elegendőség-bizonyitásában $n-4$ -et $n-2$ -vel?