Húrsokszögek geometriai szerkeszthetőségéről

Kunos Ádám
Társszerző: Czédli Gábor

PhD szeminárium
Szeged, 2014. 11. 27.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Mutatunk egy konkrét szerkesztést.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Mutatunk egy konkrét szerkesztést.

Meg kell találnunk a szerkeszthetetlenség OKÁT.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Mutatunk egy konkrét szerkesztést.

Meg kell találnunk a szerkeszthetetlenség OKÁT.

Tekintsük a szerkesztési feladatot a komplex számsíkon. Legyen a kiindulási pontokat tartalmazó halmaz $A \subseteq \mathbb{C}$.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Mutatunk egy konkrét szerkesztést.

Meg kell találnunk a szerkeszthetetlenség OKÁT.

Tekintsük a szerkesztési feladatot a komplex számsíkon. Legyen a kiindulási pontokat tartalmazó halmaz $A \subseteq \mathbb{C}$. Ekkor a $\mathbb{Q}(A \cup \overline{A}) \leq \mathbb{C}$ testet a szerkesztési feladat *alaptestének* nevezzük.

Geometriai szerkeszthetőség

Adott néhány pont a síkon, szerkesszünk (körzővel és vonalzóval) velük valamilyen adott viszonyban lévő pontokat. Például:

- két pont által meghatározott szakaszt harmadoljunk
- három pont által adott szöget harmadoljunk
- két pont által adott egységnyi hosszú szakasz alapján szerkesszünk $\sqrt{2}$ vagy $\sqrt[3]{2}$ hosszúságú szakaszokat

Mutatunk egy konkrét szerkesztést.

Meg kell találnunk a szerkeszthetetlenség OKÁT.

Tekintsük a szerkesztési feladatot a komplex számsíkon. Legyen a kiindulási pontokat tartalmazó halmaz $A \subseteq \mathbb{C}$. Ekkor a $\mathbb{Q}(A \cup \overline{A}) \leq \mathbb{C}$ testet a szerkesztési feladat *alaptestének* nevezzük.

Tétel (elegendő feltétel egy pont szerkeszthetetlenségére)

K alaptestű szerkesztési feladat esetén az $u \in \mathbb{C}$ pont nem szerkeszthető, ha u gyöke egy K feletti nem 2-hatvány fokú irreducibilis polinomnak.

Egy „friss” „eredmény”

Schreiber, P.: On the existence and constructibility of inscribed polygons. Beiträge zur Algebra und Geometrie **34**, 195–199 (1993)

Egy „friss'' „eredmény''

Schreiber, P.: On the existence and constructibility of inscribed polygons. Beiträge zur Algebra und Geometrie **34**, 195–199 (1993)

„Tétel'' (Theorem 3.)

Az n oldalú húrsokszög általában nem szerkeszthető az oldalaiból, ha $n \geq 5$.

Egy „friss” „eredmény”

Schreiber, P.: On the existence and constructibility of inscribed polygons. Beiträge zur Algebra und Geometrie **34**, 195–199 (1993)

„Tétel” (Theorem 3.)

Az n oldalú húrsokszög általában nem szerkeszthető az oldalaiból, ha $n \geq 5$.

A bizonyítása HIBÁS!

Schreiber bizonyítása szó szerint, az eredeti ábrával

Proof: Because of Theorem 2 it is sufficient to show that from a general solution for any n we could get a general solution for $n-1$.

Proof: Because of Theorem 2 it is sufficient to show that from a general solution for any n we could get a general solution for $n-1$. Let us assume for the n-sided inscribed polygon a special co-ordinate system as in Fig. 5.

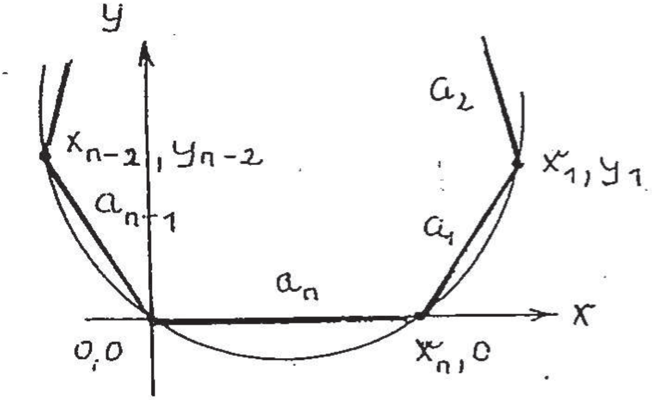


Figure 5

Schreiber bizonyítása szó szerint

If we assume the constructibility by compass and ruler in general then $x_1, y_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-2}$ (and of course also x_n) are quadratic irrationalities R_i ($i = 1, \ldots, 2n-4$) depending on the variables $a_1, \ldots, a_n$ and as such they are continuous functions of their n variables.

Schreiber bizonyítása szó szerint

If we assume the constructibility by compass and ruler in general then $x_1, y_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-2}$ (and of course also x_n) are quadratic irrationalities R_i $(i = 1, \ldots, 2n-4)$ depending on the variables $a_1, \ldots, a_n$ and as such they are continuous functions of their n variables. On the other hand, the geometrical dependence of x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n-2)$ on the variables $a_1, \ldots, a_n$ is described by the continuous functions f_i $(i = 1, \ldots, 2n-4)$ on the variables $a_1, \ldots, a_n$.

Schreiber bizonyítása szó szerint

If we assume the constructibility by compass and ruler in general then $x_1, y_1, \ldots, x_{n-2}, y_{n-2}$ (and of course also x_n) are quadratic irrationalities R_i $(i = 1, \ldots, 2n-4)$ depending on the variables $a_1, \ldots, a_n$ and as such they are continuous functions of their n variables. On the other hand, the geometrical dependence of x_i, y_i $(i = 1, \ldots, n-2)$ on the variables $a_1, \ldots, a_n$ is described by the continuous functions f_i $(i = 1, \ldots, 2n-4)$ on the variables $a_1, \ldots, a_n$. Because for $a_n \to 0$ the n-sided inscribed polygon is converging to the $(n-1)$-sided inscribed polygon with sides $a_1, \ldots, a_{n-1}$ and for each i both functions R_i and f_i are identical for $a_n \neq 0$ and both are continuous, the R_i must have the same limit values for $a_n \to 0$ as the f_i, i.e. for $a_n = 0$ the quadratic irrationalities R_i describe the constructibility of the $(n-1)$-sided inscribed polygon as depending on its sides $a_1, \ldots, a_{n-1}$. •

Hibás?

Hol a hiba?

A hiba pirossal kiemelve

If we assume the constructibility by compass and ruler in general then $x_1, y_1, \dots, x_{n-2}, y_{n-2}$ (and of course also x_n) are quadratic irrationalities R_i $(i = 1, \dots, 2n-4)$ depending on the variables $a_1, \dots, a_n$ and as such they are continuous functions of their n variables. On the other hand, the geometrical dependence of x_i, y_i $(i = 1, \dots, n-2)$ on the variables $a_1, \dots, a_n$ is described by the continuous functions f_i $(i = 1, \dots, 2n-4)$ on the variables $a_1, \dots, a_n$. Because for $a_n \to 0$ the n-sided inscribed polygon is converging to the $(n-1)$-sided inscribed polygon with sides $a_1, \dots, a_{n-1}$ and for each i both functions R_i and f_i are identical for $a_n \neq 0$ and both are continuous, the R_i must have the same limit values for $a_n \to 0$ as the f_i, i.e. for $a_n = 0$ the quadratic irrationalities R_i describe the constructibility of the $(n-1)$-sided inscribed polygon as depending on its sides $a_1, \dots, a_{n-1}$. •

Schreiber nyomában

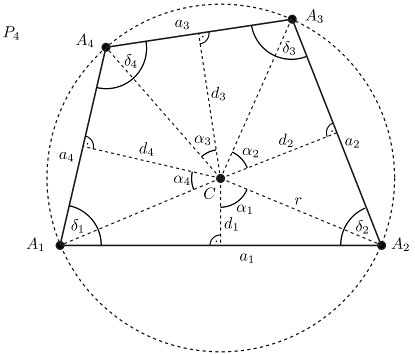
Tétel (Czédli G., K, 2013)

Legyen $n \geq 4$ páros egész. Ekkor az n oldalú húrsokszög akkor és csak akkor szerkeszthető általában az oldalaiból, ha $n = 4$.

Tétel (Czédli G., K, 2013)

Legyen $n \geq 4$ páros egész. Ekkor az n oldalú húrsokszög akkor és csak akkor szerkeszthető általában az oldalaiból, ha $n = 4$.

Bizonyítás. $n = 4: a_1^2 + a_4^2 - 2a_1 a_4 \cos\delta_1 = \overline{A_2 A_4}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2 a_3 \cos\delta_1$



A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.

A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.
$n \geq 8$: Olyan $1 \leq p \leq n-1$ prímet és $a, b \in \mathbb{N}$ számokat fogunk keresni melyekre a p db a és $n-p$ db b oldalhosszúságokkal rendelkező húrsokszög nem szerkeszthető. (Egzisztencia?)

A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.
$n \geq 8$: Olyan $1 \leq p \leq n-1$ prímet és $a, b \in \mathbb{N}$ számokat fogunk keresni melyekre a p db a és $n-p$ db b oldalhosszúságokkal rendelkező húrsokszög nem szerkeszthető. (Egzisztencia?) Az a és b hosszúságú oldalakhoz tartozó középponti szögek felét jelölje rendre α, β. Az eddigi jelölésekkel $p\alpha + (n-p)\beta = \pi$, melyből

$$\sin(p\alpha) - \sin((n-p)\beta) = 0$$

adódik.

A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.
$n \geq 8$: Olyan $1 \leq p \leq n-1$ prímet és $a, b \in \mathbb{N}$ számokat fogunk keresni melyekre a p db a és $n-p$ db b oldalhosszúságokkal rendelkező húrsokszög nem szerkeszthető. (Egzisztencia?) Az a és b hosszúságú oldalakhoz tartozó középponti szögek felét jelölje rendre α, β. Az eddigi jelölésekkel $p\alpha + (n-p)\beta = \pi$, melyből

$$\sin(p\alpha) - \sin((n-p)\beta) = 0$$

adódik. Legyen $u := 1/(2r)$. Világos, hogy a húrsokszögünk akkor és csak akkor szerkeszthető, ha u szerkeszthető.

A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.
$n \geq 8$: Olyan $1 \leq p \leq n-1$ prímet és $a, b \in \mathbb{N}$ számokat fogunk keresni melyekre a p db a és $n-p$ db b oldalhosszúságokkal rendelkező húrsokszög nem szerkeszthető. (Egzisztencia?) Az a és b hosszúságú oldalakhoz tartozó középponti szögek felét jelölje rendre α, β. Az eddigi jelölésekkel $p\alpha + (n-p)\beta = \pi$, melyből

$$\sin(p\alpha) - \sin((n-p)\beta) = 0$$

adódik. Legyen $u := 1/(2r)$. Világos, hogy a húrsokszögünk akkor és csak akkor szerkeszthető, ha u szerkeszthető. A bevezetett jelölésekkel

$$\sin\alpha = au, \ \sin\beta = bu, \ \cos\alpha = \sqrt{1-a^2u^2}, \text{ és } \cos\beta = \sqrt{1-b^2u^2}$$

adódik.

A bizonyítás

$n = 6$ eset megtalálható a *Czédli G., Szendrei Á.: Geometriai szerkeszthetőség (Polygon, 1997)* könyvben.
$n \geq 8$: Olyan $1 \leq p \leq n-1$ prímet és $a, b \in \mathbb{N}$ számokat fogunk keresni melyekre a p db a és $n-p$ db b oldalhosszúságokkal rendelkező húrsokszög nem szerkeszthető. (Egzisztencia?) Az a és b hosszúságú oldalakhoz tartozó középponti szögek felét jelölje rendre α, β. Az eddigi jelölésekkel $p\alpha + (n-p)\beta = \pi$, melyből

$$\sin(p\alpha) - \sin((n-p)\beta) = 0$$

adódik. Legyen $u := 1/(2r)$. Világos, hogy a húrsokszögünk akkor és csak akkor szerkeszthető, ha u szerkeszthető. A bevezetett jelölésekkel

$$\sin\alpha = au,\ \sin\beta = bu,\ \cos\alpha = \sqrt{1-a^2u^2},\ \text{és}\ \cos\beta = \sqrt{1-b^2u^2}$$

adódik. Felhasználva, hogy

$$\sin(k\gamma) = \sum_{2\nmid j=1}^{k} (-1)^{(j-1)/2} \binom{k}{j} (\cos\gamma)^{k-j} \cdot (\sin\gamma)^j,$$

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak.

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak. Figyeljük meg, hogy a konstans tag 0.

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1 - a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j -$$
$$\sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1 - b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak. Figyeljük meg, hogy a konstans tag 0. Úgy szeretnénk megválasztani p, a és b paramétereinket, hogy a $q(x)/x$ polinom (irreducibilis legyen és) irreducibilitását meg tudjuk mutatni az Eisenstein-Schönemann irreducibilitási kritériummal, a p prímmel.

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j -$$
$$\sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak. Figyeljük meg, hogy a konstans tag 0. Úgy szeretnénk megválasztani p, a és b paramétereinket, hogy a $q(x)/x$ polinom (irreducibilis legyen és) irreducibilitását meg tudjuk mutatni az Eisenstein-Schönemann irreducibilitási kritériummal, a p prímmel. Mi a q polinom főegyütthatója?

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak. Figyeljük meg, hogy a konstans tag 0. Úgy szeretnénk megválasztani p, a és b paramétereinket, hogy a $q(x)/x$ polinom (irreducibilis legyen és) irreducibilitását meg tudjuk mutatni az Eisenstein-Schönemann irreducibilitási kritériummal, a p prímmel. Mi a q polinom főegyütthatója? Válasszuk úgy a p prímet, hogy $n/2 < p < n$ teljesüljön.

A bizonyítás

adódik, hogy u gyöke a

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1 - a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j -$$
$$\sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1 - b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinomnak. Figyeljük meg, hogy a konstans tag 0. Úgy szeretnénk megválasztani p, a és b paramétereinket, hogy a $q(x)/x$ polinom (irreducibilis legyen és) irreducibilitását meg tudjuk mutatni az Eisenstein-Schönemann irreducibilitási kritériummal, a p prímmel. Mi a q polinom főegyütthatója? Válasszuk úgy a p prímet, hogy $n/2 < p < n$ teljesüljön. Ekkor a főegyüttható $\equiv \pm 1$ (p), ha a-t $a \equiv 1$ (p^2) módon választjuk.

A bizonyítás

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1 - a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j -$$

$$\sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1 - b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

A konstans tag $q(x)/x$-ben:

$$\binom{p}{1} a - \binom{n-p}{1} b = pa - (n-p)b$$

A bizonyítás

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j -$$
$$\sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

A konstans tag $q(x)/x$-ben:

$$\binom{p}{1} a - \binom{n-p}{1} b = pa - (n-p)b \equiv p, \quad (p^2)$$

ha b-t $b \equiv 0 \ (p^2)$ módon választjuk.

A bizonyítás

$$q(x) =: \sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

A konstans tag $q(x)/x$-ben:

$$\binom{p}{1} a - \binom{n-p}{1} b = pa - (n-p)b \equiv p, \quad (p^2)$$

ha b-t $b \equiv 0$ (p^2) módon választjuk. Ezekkel a választásokkal működik az Eisenstein-Schönemann kritérium!

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett.

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk.

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk. p-ről eddig csak annyit tettünk fel, hogy $n/2 < p < n$. Van-e ebben az intervallumban olyan prím, ami nem Fermat-prím?

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk. p-ről eddig csak annyit tettünk fel, hogy $n/2 < p < n$. Van-e ebben az intervallumban olyan prím, ami nem Fermat-prím? A Fermat-prímek nagyon ritkán vannak...

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk. p-ről eddig csak annyit tettünk fel, hogy $n/2 < p < n$. Van-e ebben az intervallumban olyan prím, ami nem Fermat-prím? A Fermat-prímek nagyon ritkán vannak...

Tétel (J. Nagura, 1952)

Minden $25 \leq x$ valós számra van prímszám a nyitott $(x, 6x/5)$ intervallumban.

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk. p-ről eddig csak annyit tettünk fel, hogy $n/2 < p < n$. Van-e ebben az intervallumban olyan prím, ami nem Fermat-prím? A Fermat-prímek nagyon ritkán vannak...

Tétel (J. Nagura, 1952)

Minden $25 \leq x$ valós számra van prímszám a nyitott $(x, 6x/5)$ intervallumban.

Ezzel a tétellel kaphatunk két prímet az $(x, 36x/25)$ intervallumban, így $k \geq 25$ esetén van legalább két különböző prím a $(k, 2k)$ intervallumban.

A bizonyítás

Ott tartunk, hogy a $q(x)/x$ egy olyan $p-1$-ed fokú polinom, melynek gyöke a szerkesztendő mennyiség, irreducibilis $\mathbb{Q}$ (a szerkesztési feladatunk alapteste) felett. Ha tehát $p-1$ nem 2-hatvány, azaz p nem Fermat-prím, készen vagyunk. p-ről eddig csak annyit tettünk fel, hogy $n/2 < p < n$. Van-e ebben az intervallumban olyan prím, ami nem Fermat-prím? A Fermat-prímek nagyon ritkán vannak...

Tétel (J. Nagura, 1952)

Minden $25 \leq x$ valós számra van prímszám a nyitott $(x, 6x/5)$ intervallumban.

Ezzel a tétellel kaphatunk két prímet az $(x, 36x/25)$ intervallumban, így $k \geq 25$ esetén van legalább két különböző prím a $(k, 2k)$ intervallumban. Addig pedig kézzel könnyen kereshetünk:

n	5	8–13	14–25	26–45	46–85
p	3	7	13	23	43

A páratlan esetről: a sejtés

Az esetek „nagy része" már megoldott:

Gauss–Wantzel tétel

Legyen $n > 2$ egész. Szabályos n szög akkor és csakis akkor szerkeszthető (oldalhosszából), ha $n = 2^k p_1 p_2 \dots p_r$, ahol $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző Fermat-prímek.

A páratlan esetről: a sejtés

Az esetek „nagy része" már megoldott:

Gauss–Wantzel tétel

Legyen $n > 2$ egész. Szabályos n szög akkor és csakis akkor szerkeszthető (oldalhosszából), ha $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_r$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_r$ különböző Fermat-prímek.

Sejtés

Legyen $n \geq 3$ egész. Ekkor az n oldalú húrsokszög pontosan $n = 3, 4$ esetekben szerkeszthető az oldalaiból.

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2}\binom{p}{j}(1-a^2x^2)^{(p-j)/2}\cdot(ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2}\binom{n-p}{j}(1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2}\cdot(bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom.

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot!

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{\substack{j=1\\2\nmid j}}^{p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{p}{j}(1-a^2x^2)^{(p-j)/2}\cdot(ax)^j-\sum_{\substack{j=1\\2\nmid j}}^{n-p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{n-p}{j}(1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2}\cdot(bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot! $f(x)-g(x)$ jelöléssel élve képezzük a $h(x):=f^2(x)-g^2(x)$ kifejezést, mely már polinom

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{p}{j}(1-a^2x^2)^{(p-j)/2}\cdot(ax)^j-\sum_{2\nmid j=1}^{n-p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{n-p}{j}(1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2}\cdot(bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot! $f(x)-g(x)$ jelöléssel élve képezzük a $h(x):=f^2(x)-g^2(x)$ kifejezést, mely már polinom és $f(x)-g(x)$ gyökeit tartalmazza saját gyökei között.

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{p}{j}(1-a^2x^2)^{(p-j)/2}\cdot(ax)^j-\sum_{2\nmid j=1}^{n-p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{n-p}{j}(1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2}\cdot(bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot! $f(x)-g(x)$ jelöléssel élve képezzük a $h(x) := f^2(x)-g^2(x)$ kifejezést, mely már polinom és $f(x)-g(x)$ gyökeit tartalmazza saját gyökei között. Erre a polinomra nem működik az Eisenstein-Schönemann kritérium.

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{p}{j} (1-a^2x^2)^{(p-j)/2} \cdot (ax)^j - \sum_{2\nmid j=1}^{n-p} (-1)^{(j-1)/2} \binom{n-p}{j} (1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2} \cdot (bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot! $f(x) - g(x)$ jelöléssel élve képezzük a $h(x) := f^2(x) - g^2(x)$ kifejezést, mely már polinom és $f(x) - g(x)$ gyökeit tartalmazza saját gyökei között. Erre a polinomra nem működik az Eisenstein-Schönemann kritérium. Második ötlet: Próbáljuk sinus helyett cosinussal!

A korábbi megfontolás nem működik

A korábbi tétel bizonyításban kulcsfontosságú

$$\sum_{2\nmid j=1}^{p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{p}{j}(1-a^2x^2)^{(p-j)/2}\cdot(ax)^j-\sum_{2\nmid j=1}^{n-p}(-1)^{(j-1)/2}\binom{n-p}{j}(1-b^2x^2)^{(n-p-j)/2}\cdot(bx)^j$$

polinom ebben az esetben nem is polinom. Csináljunk belőle polinomot! $f(x)-g(x)$ jelöléssel élve képezzük a $h(x):=f^2(x)-g^2(x)$ kifejezést, mely már polinom és $f(x)-g(x)$ gyökeit tartalmazza saját gyökei között. Erre a polinomra nem működik az Eisenstein-Schönemann kritérium. Második ötlet: Próbáljuk sinus helyett cosinussal!

$$\cos(k\gamma)=\sum_{2|j=0}^{k}(-1)^{j/2}\binom{k}{j}(\cos\gamma)^{k-j}\cdot(\sin\gamma)^j$$

A korábbi bizonyításban szereplőket helyettesítve nem kapunk polinomot.

A korábbi megfontolás nem működik

A középponti szögekre cosinus tételeket felírva, a korábbi bizonyításbeli oldalválasztással a

$$p(x) := \sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{p} \binom{p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2a^2x^2)^{p-i} (2ax)^i (1-a^2x^2)^{\frac{i}{2}} - \sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{n-p} \binom{n-p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2b^2x^2)^{n-p-i} (2bx)^i (1-b^2x^2)^{\frac{i}{2}}$$

polinom adódik.

A korábbi megfontolás nem működik

A középponti szögekre cosinus tételeket felírva, a korábbi bizonyításbeli oldalválasztással a

$$p(x) := \sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{p} \binom{p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2a^2x^2)^{p-i} (2ax)^i (1-a^2x^2)^{\frac{i}{2}} -$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{n-p} \binom{n-p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2b^2x^2)^{n-p-i} (2bx)^i (1-b^2x^2)^{\frac{i}{2}}$$

polinom adódik. A $p(x)/x^2$ polinom konstans tagja $b \equiv 0 \ (p^2)$ választással

$$\equiv \binom{p}{2}(-1)^{\frac{2}{2}} 4a^2 + \binom{p}{0}(-1)^0 \binom{p}{1} \cdot (-2a^2) = -2a^2p^2 \ \ (p^2).$$

A korábbi megfontolás nem működik

A középponti szögekre cosinus tételeket felírva, a korábbi bizonyításbeli oldalválasztással a

$$p(x) := \sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{p} \binom{p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2a^2x^2)^{p-i} (2ax)^i (1-a^2x^2)^{\frac{i}{2}} -$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ 2|i}}^{n-p} \binom{n-p}{i} (-1)^{\frac{i}{2}} (1-2b^2x^2)^{n-p-i} (2bx)^i (1-b^2x^2)^{\frac{i}{2}}$$

polinom adódik. A $p(x)/x^2$ polinom konstans tagja $b \equiv 0\ (p^2)$ választással

$$\equiv \binom{p}{2} (-1)^{\frac{2}{2}} 4a^2 + \binom{p}{0} (-1)^0 \binom{p}{1} \cdot (-2a^2) = -2a^2p^2 \ \ (p^2).$$

Lehet, hogy mégis vannak olyan páratlan esetek, amikor szerkeszthető a sokszög??

A sejtés megtámogatása

A korábban tárgyalt $h(x)$ polinommal, $r(x) := h(\sqrt{x})$ jelöléssel a következőket kapjuk computer algebrával:

A sejtés megtámogatása

A korábban tárgyalt $h(x)$ polinommal, $r(x) := h(\sqrt{x})$ jelöléssel a következőket kapjuk computer algebrával:

n	15	15	17	51	85	255	257	771
$n =$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 5$	17	$3 \cdot 17$	$5 \cdot 17$	$15 \cdot 17$	257	$3 \cdot 257$
p	13	11	15	49	83	253	255	
a	1	1	1	1	1	1	1	
b	2	2	2	2	2	2	2	
$\deg_x(r(x)/x)$	12	10	14	48	82	252	254	
irreducible?	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	?

A sejtés megtámogatása

A korábban tárgyalt $h(x)$ polinommal, $r(x) := h(\sqrt{x})$ jelöléssel a következőket kapjuk computer algebrával:

n	15	15	17	51	85	255	257	771
$n =$	$3 \cdot 5$	$3 \cdot 5$	17	$3 \cdot 17$	$5 \cdot 17$	$15 \cdot 17$	257	$3 \cdot 257$
p	13	11	15	49	83	253	255	
a	1	1	1	1	1	1	1	
b	2	2	2	2	2	2	2	
$\deg_x(r(x)/x)$	12	10	14	48	82	252	254	
irreducible?	yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	?

A sejtés tehát 770-ig igaz.

Egy rokon probléma

Mikor szerkeszthető húrsokszög abban az esetben, ha a körülírt középpont oldalaktól való távolsága adott?

Egy rokon probléma

Mikor szerkeszthető húrsokszög abban az esetben, ha a körülírt középpont oldalaktól való távolsága adott?
Hasonlóan kezelhető, mint az oldalhosszas feladat.

Egy rokon probléma

Mikor szerkeszthető húrsokszög abban az esetben, ha a körülírt középpont oldalaktól való távolsága adott?
Hasonlóan kezelhető, mint az oldalhosszas feladat.
Vagy mégsem?: Háromszög nem szerkeszthető a körülírt középpontjának oldalaitól mért távolságaiból.

Egy rokon probléma

Mikor szerkeszthető húrsokszög abban az esetben, ha a körülírt középpont oldalaktól való távolsága adott?
Hasonlóan kezelhető, mint az oldalhosszas feladat.
Vagy mégsem?: Háromszög nem szerkeszthető a körülírt középpontjának oldalaitól mért távolságaiból.

Állítás (Czédli G., K, 2013)

Páros $n \geq 4$ esetén akkor és csak akkor szerkeszthető húrsokszög a körülírt középpontjának oldalaitól mért távolságából, ha $n = 4$.

Egy rokon probléma

Mikor szerkeszthető húrsokszög abban az esetben, ha a körülírt középpont oldalaktól való távolsága adott?
Hasonlóan kezelhető, mint az oldalhosszas feladat.
Vagy mégsem?: Háromszög nem szerkeszthető a körülírt középpontjának oldalaitól mért távolságaiból.

Állítás (Czédli G., K, 2013)

Páros $n \geq 4$ esetén akkor és csak akkor szerkeszthető húrsokszög a körülírt középpontjának oldalaitól mért távolságából, ha $n = 4$.

Ez újabb érvelést ad arra, hogy Schreiber bizonyítása hibás.

Hivatkozások

- Cox, D. A.: Why Eisenstein proved the Eisenstein criterion and why Schönemann discovered it first. The American Mathematical Monthly **118/1**, 3–21 (1 January 2011)
- Czédli, G., Szendrei, Á.: Geometric constructibility. Polygon (Szeged), ix+329 pages (1997) (in Hungarian, ISSN 1218-4071)
- Nagura, J.: On the interval containing at least one prime number. Proc. Japan Acad. **28**, 177–181 (1952)
- Pak, I.: The area of cyclic polygons: recent progress on Robbins conjectures. Advances in Applied Mathematics **34**, 690–696 (2005)
- Schreiber, P.: On the existence and constructibility of inscribed polygons. Beiträge zur Algebra und Geometrie **34**, 195–199 (1993)
- Varfolomeev, V. V.: Galois groups of Heron-Sabitov polynomials for pentagons inscribed in a circle. Sb. Math. **195**, 3–16 (2004)
- Wantzel, P. L.: Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec le règle et le compas. J. Math. Pures Appl. **2**, 366–372 (1837)

→ Czédli, G., Kunos, Á.: On the geometric constructibility of cyclic polygons with even number of vertices, submitted

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!