# Valós függvények előállítása kompozícióként

Kunos Ádám
társszerző: Danka Tivadar

Őszi kultúrális fesztivál
Bolyai Intézet

Szeged, 2014. október 11.

# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

## Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = 2x$

# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$

# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

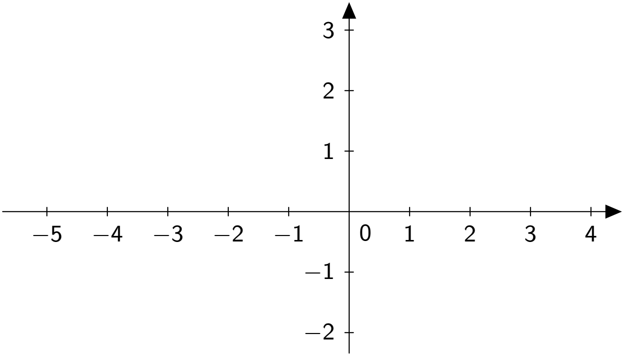
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$

# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



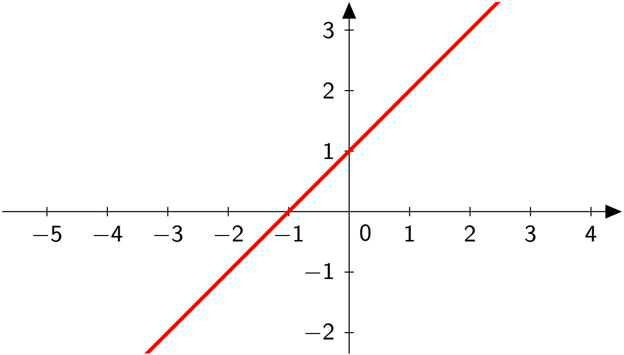
# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



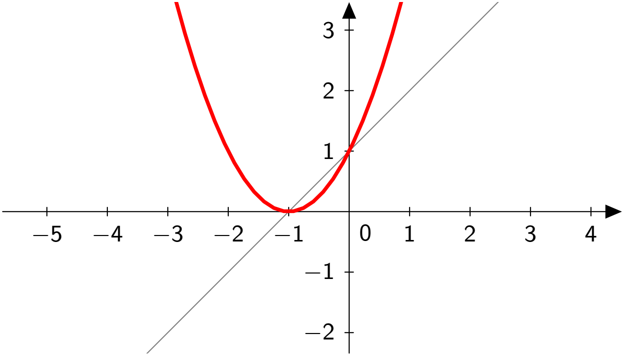
# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

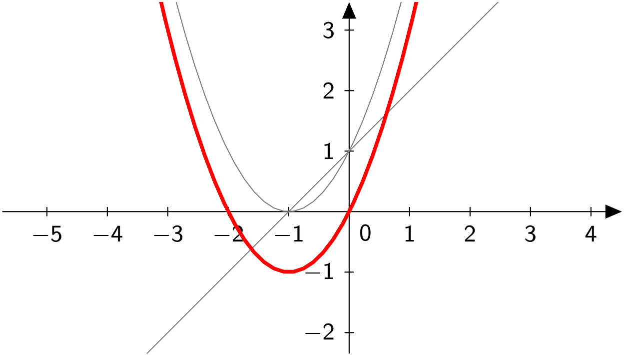
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



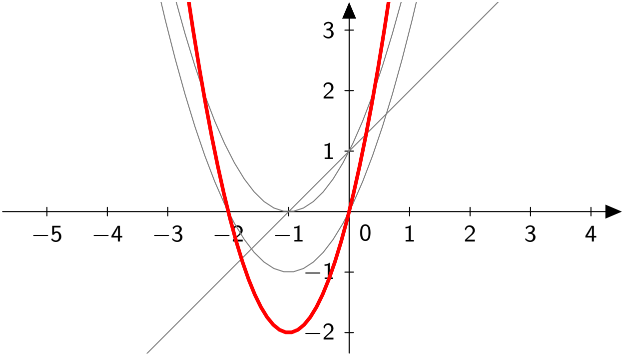
# Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, $x^2$, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, $x^2$, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

**Probléma**

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, $x^2$, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

## Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, $x^3$, $2^x$, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük.

# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, $x^2$, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

## Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, $x^3$, $2^x$, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük. Mennyi a legkevesebb függvény, amivel megoldható a feladat?

# Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, $x^2$, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

## Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, $x^3$, $2^x$, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük. Mennyi a legkevesebb függvény, amivel megoldható a feladat?

Kérdezzünk még merészebbeket!

# Építkezés – ígéret látatlanban

## Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb $k$ függvényt a 100 függvény megkapása után, utólag kell majd kiválasztanunk.)

# Építkezés – ígéret látatlanban

## Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretetet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb $k$ függvényt a 100 függvény megkapása után, utólag kell majd kiválasztanunk.)

## Probléma

$n$ függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami $n$-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

# Építkezés – ígéret látatlanban

## Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk” kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb $k$ függvényt a 100 függvény megkapása után, utólag kell majd kiválasztanunk.)

## Probléma

$n$ függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami $n$-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

Pl.: $n$ függvény esetén meg tudjuk csinálni például legfeljebb $\frac{2}{3}n + c$ függvénnyel ($c$ egy rögzített konstans)?

# Építkezés – ígéret látatlanban

## Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb $k$ függvényt a 100 függvény megkapása után, utólag kell majd kiválasztanunk.)

## Probléma

$n$ függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami $n$-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

Pl.: $n$ függvény esetén meg tudjuk csinálni például legfeljebb $\frac{2}{3}n + c$ függvénnyel ($c$ egy rögzített konstans)? Még ügyesebben esetleg legfeljebb $\log n + c$ függvénnyel?

# A történet kezdete számomra

2013. január 8., 9:27, Danka Tivadar $\xrightarrow{\boxtimes}$ Kunos Ádám:

# A történet kezdete számomra

2013. január 8., 9:27, Danka Tivadar $\xrightarrow{\boxtimes}$ Kunos Ádám:

„Küldök egy feladatot, mégpedig azt, amiről legutóbb beszéltem.

Legyenek $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvények. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan $g_1, g_2, g_3$ függvények, hogy bármely $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén $f_i = g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \cdots \circ g_{i_k}$, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, 3\}$ !

Én adtam erre egy megoldást, leírom a levél alján fehér színű betűkkel. Lehetőleg csak akkor olvasd el, miután már gondolkoztál rajta sok időt :)"

# A reakcióm

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

## Probléma

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?

Minden lovon pontosan egy lovas ül...

**Probléma**

Ugyananny egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez?

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

### Probléma

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI.

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?

Minden lovon pontosan egy lovas ül...

## Probléma

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni?

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

## Probléma

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

## Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

**Probléma**

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

**Tétel**

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális.

# Előkészületek a megoldásokhoz

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan lehetséges ez?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

**Probléma**

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

**Tétel**

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális.

**Tétel**

Nem ugyanannyi valós szám van, mint racionális.

**Tétel**

A valós számok egy olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazának, ami tartalmaz nyílt intervallumot, ugyanannyi eleme van, mint a valós számok halmazának, azaz létezik $H \to \mathbb{R}$ bijekció.

# Előkészületek a megoldásokhoz

## Tétel

A valós számok egy olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazának, ami tartalmaz nyílt intervallumot, ugyanannyi eleme van, mint a valós számok halmazának, azaz létezik $H \to \mathbb{R}$ bijekció.

## Tétel

$\mathbb{R}^n$ elemszáma megegyezik $\mathbb{R}$ elemszámával tetszőleges $n > 0$ egész esetén.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1, 2)$ bijekció.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1, 2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1, 2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan $g_3$ kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint $f_k$ az egész számegyenesen”.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan $g_3$ kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint $f_k$ az egész számegyenesen".
Formálisan, $g_3$-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{(k-1)}$$

módon kell viselkednie.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan $g_3$ kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint $f_k$ az egész számegyenesen”.
Formálisan, $g_3$-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{(k-1)}$$

módon kell viselkednie. Ezeken az intervallumokon kívül mindegy, mit csinál $g_3$.

# Saját megoldásom

Legyen $g_1$ egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{(k-1)} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan $g_3$ kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint $f_k$ az egész számegyenesen".
Formálisan, $g_3$-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{(k-1)}$$

módon kell viselkednie. Ezeken az intervallumokon kívül mindegy, mit csinál $g_3$. Készen vagyunk.

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények!

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük.

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen $g$ egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció.

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen $g$ egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen $g$ egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 := g \circ g_2^* \circ g^{-1}$

# Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy $g_1, g_1, g_3$ valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen $g$ egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 := g \circ g_2^* \circ g^{-1}$
- $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3 := g_3^* \circ g^{-1}$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1$$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1$$
$$= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*)$$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
& g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
& = (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
& = g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^*
\end{aligned}
$$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
&= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
&= g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
&= g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*
\end{aligned}
$$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned}
&g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
&= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
&= g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
&= g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^* = f_i.
\end{aligned}$$

# Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned}
& g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1\text{ db}} \circ g_1 \\
& = (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
& = g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
& = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1\text{ db}} \circ g_1^* = f_i.
\end{aligned}$$

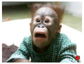
Készen vagyunk.

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

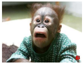
**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen. 

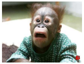
# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

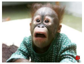
**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

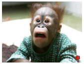
Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem.

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

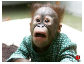
**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$.

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

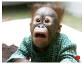
Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$.

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

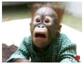
**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} =$$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

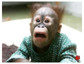
**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} =$$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

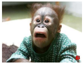
**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} = g^{(ij)} =$$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

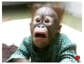
**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} = g^{(ij)} = (g^{(i)})^{(j)} =$$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

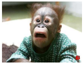
**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} = g^{(ij)} = (g^{(i)})^{(j)} = f_1^{(j)},$$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

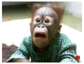
Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} = g^{(ij)} = (g^{(i)})^{(j)} = f_1^{(j)},$$

ami ellentmondás, hiszen $f_1^{(j)}(x) = x + j$

# Készen vagyunk, vagy van még kérdés?

**Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?**

Igen.  (Jóval bonyolultabb megoldások, itt most nincs rá idő.)

**Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?**

Nem. Legyen $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x$. Tegyük fel, hogy létezik egy olyan $g$, melyre $g^{(i)} = f_1$ és $g^{(j)} = f_2$. Ekkor

$$f_2 = f_2^{(i)} = (g^{(j)})^{(i)} = g^{(ij)} = (g^{(i)})^{(j)} = f_1^{(j)},$$

ami ellentmondás, hiszen $f_1^{(j)}(x) = x + j \neq f_2(x)$.

# Még egy utolsó kérdés

# Még egy utolsó kérdés


**Mi van, ha véges sok helyett végtelen sok függvényünk van?**

# Még egy utolsó kérdés


**Mi van, ha véges sok helyett végtelen sok függvényünk van?**

Milyen végtelen???

# Még egy utolsó kérdés


**Mi van, ha véges sok helyett végtelen sok függvényünk van?**

Milyen végtelen???
$f_1, f_2, f_3, \ldots$

# Még egy utolsó kérdés


**Mi van, ha véges sok helyett végtelen sok függvényünk van?**

Milyen végtelen???
$f_1, f_2, f_3, \ldots$
Meg lehet csinálni, a bemutatott bizonyítások könnyen átvihetők... HF

# Referencia


- Laczkovich M. és T. Sós V., *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006
- Danka T. és Kunos Á., *Valós függvények előállítása kompozícióként*, Polygon, XXII. köt., 1-2. sz., 2014. máj., 85-102.

# Köszönöm a figyelmet!