A hatványközepek

Kunos Ádám

2010. december 4.

Definíció. Legyenek $a_1, ..., a_n$ pozitív számok. Ekkor minden valós α-ra a

$$H_\alpha = \begin{cases} \left(\dfrac{a_1^\alpha + ... + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \text{ha } \alpha \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n}, \quad \text{ha } \alpha = 0 \end{cases}$$

számot az $a_1, ..., a_n$ számok α-adik hatványközepének nevezzük.

Tétel. Tetszőleges $a_1, ..., a_n$ pozitív számokra és $\alpha < \beta$ valósakra:

$$H_\alpha(a_1, ..., a_n) \leq H_\beta(a_1, ..., a_n).$$

Feladatok.

1. Feladat. Határozzuk meg a $\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)$ trigonometrikus kifejezés maximumát és minimumát, ha $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Megoldás. A hatványközepek közötti egyenlőtlenséget használva ($\sin x, \cos x \geq 0$):

$$\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x) = 2 \cdot \left(\left(\frac{\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2010}}\right)^{2010} \geq 2 \cdot \left(\left(\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{2010} = 2^{-1004}.$$

Egyenlőség $x = \frac{\pi}{4}$ esetben fennáll. A másik irányú egyenlőtlenséget a következő - a binomiális tétellel egyszerűen látható - egyenlőtlenséggel igazoljuk. a, b nemnegatív számok esetén

$$a^{1005} + b^{1005} \leq (a + b)^{1005}.$$

Helyettesítsünk ebbe az egyenlőtlenségbe $a = \sin^2(x)$, $b = \cos^2(x)$ módon. Így a

$$\sin^{2010}(x) + \cos^{2010}(x) \leq (\sin^2(x) + \cos^2(x))^{1005} = 1$$

felső becslést nyerjük, és mivel $x = 0$ helyen 1-et vesz fel a kifejezés, készen vagyunk.

2. Feladat. n gömb térforgatának összege 1. Milyen határok között mozoghat a gömbök felszínének összege? ("Zérus sugarú" gömböket is megengedünk.)

Megoldás. Legyen a gömbök sugara $r_1, ..., r_n$. Ekkor a feltétel

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + ... \frac{4}{3}\pi r_n^3 = 1$$

alakú. Becsüljük a felszín összegét felülről a hatványközepek közötti egyenlőtlenséggel.

$$A = 4\pi r_1^2 + ... + 4\pi r_n^2 = 4n\pi\left(\left(\frac{r_1^2+...+r_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leq 4n\pi\left(\left(\frac{r_1^3+...+r_n^3}{n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 4n\pi\left(\left(\frac{3}{4n\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \sqrt[3]{36n\pi}$$

A felső becsléssel készen vagyunk. Az alsó becsléshez használjuk fel az 1. feladatban látotthoz hasonló, nemnegatív $a_1, ..., a_n$ számokra érvényes

$$a_1^{\frac{3}{2}} + ... + a_n^{\frac{3}{2}} \leq (a_1 + ... + a_n)^{\frac{3}{2}}$$

egyenlőtlenséget. Ennek az $a_1 = r_1^2, ..., a_n = r_1^2$ helyettesítéssel kapott alakját használjuk az alsó becslésnél.

$$A = 4\pi r_1^2 + ... + 4\pi r_n^2 = 4\pi\left((r_1^2+...+r_n^2)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 4\pi\left((r_1^2)^{\frac{3}{2}} + ... + (r_n^2)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\pi\left(r_1^3+...+r_n^3\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36\pi}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\sqrt[3]{36\pi} \leq A \leq \sqrt[3]{36n\pi}.$$

Ha minden gömb egyenlő sugarú, akkor $A = \sqrt[3]{36n\pi}$, ha $(n-1)$ gömb sugara 0, akkor $A = \sqrt[3]{36\pi}$, becsléseink tehát élesek. Készen vagyunk.

3. Feladat. Legyenek α, β, γ egy hegyesszögű háromszög szögei. Keressük meg a $\tan^n \alpha + \tan^n \beta + \tan^n \gamma$ $(n = 1, 2, ...)$ kifejezés lehető legkisebb értékét.

Megoldás. A feladat megoldásához fel fogjuk használni azt a trigonometrikus azonosságot, miszerint, ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma.$$

Először ezt bizonyítjuk. Az ismert, hogy $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$, ahonnan

$$\tan\alpha + \tan\beta = (\tan(\alpha+\beta))(1-\tan\alpha\tan\beta).$$

Ennek az egyenlőségnek mindkét oldalához $\tan\gamma = \tan(\pi-(\alpha+\beta)) = -\tan(\alpha+\beta)$-t adva

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = (\tan(\alpha+\beta))(1-\tan\alpha\tan\beta) - \tan(\alpha+\beta) = \tan(\alpha+\beta)(-\tan\alpha\tan\beta) =$$

$$= (-\tan\gamma)(-\tan\alpha\tan\beta) = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma,$$

amit bizonyítani akartunk. Térjünk most már a feladat megoldására. Legyen $X = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. Ekkor a számtani-mértani közepek segítségével $(\tan\alpha, \tan\beta, \tan\gamma > 0)$

$$\frac{X}{3} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{3} \geq \sqrt[3]{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma} = \sqrt[3]{X},$$

ezt átrendezve

$$X \geq \sqrt{27}.$$

A hatványközepek segítségével így a

$$\tan^n\alpha + \tan^n\beta + \tan^n\gamma = 3\cdot\left(\left(\frac{\tan^n\alpha+\tan^n\beta+\tan^n\gamma}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \geq 3\cdot\left(\sqrt[3]{\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}\right)^n = 3\cdot\left(\sqrt[3]{X}\right)^n \geq$$

$$\geq 3\cdot\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^n = 3^{\frac{n}{2}+1}$$

becslés adódik, mely pontos is, hiszen szabályos háromszög esetén egyenlőség teljesül. Készen vagyunk.