Egy általános iskolai feladat egyetemi megvilágításban

avagy mit kell(ene) tudnia egy 8.-osnak a matematika versenyeken

Kunos Ádám

Középiskolás pályázat díjkiosztó
SZTE Bolyai Intézet

2011. november 12.

A feladat

A feladat

Kalmár László Matematikaverseny, 8. osztály, országos döntő, 2001, 1. versenynap, 4. feladat

A feladat

Kalmár László Matematikaverseny, 8. osztály, országos döntő, 2001, 1. versenynap, 4. feladat

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

A feladat

Kalmár László Matematikaverseny, 8. osztály, országos döntő, 2001, 1. versenynap, 4. feladat

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

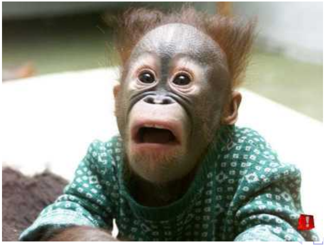
$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

A feladat

Kalmár László Matematikaverseny, 8. osztály, országos döntő, 2001, 1. versenynap, 4. feladat

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$



Hogyan fogjunk neki?

Három megközelítési irány:

Hogyan fogjunk neki?

Három megközelítési irány:

- Általános iskolás
  - Általános iskolás (csak(!) általános iskolás anyagot használó) megoldás keresése.
  - Minél egyszerűbb(!?) ilyen keresése.

Hogyan fogjunk neki?

Három megközelítési irány:

- Általános iskolás
  - Általános iskolás (csak(!) általános iskolás anyagot használó) megoldás keresése.
  - Minél egyszerűbb(!?) ilyen keresése.
- Középiskolás
  - Közép/emelt szintű érettségi anyagát használó módszer keresése.
  - Minél egyszerűbb(!?) ilyen keresése.

Hogyan fogjunk neki?

Három megközelítési irány:

- Általános iskolás
  - Általános iskolás (csak(!) általános iskolás anyagot használó) megoldás keresése.
  - Minél egyszerűbb(!?) ilyen keresése.
- Középiskolás
  - Közép/emelt szintű érettségi anyagát használó módszer keresése.
  - Minél egyszerűbb(!?) ilyen keresése.
- "Lényeget" kereső
  - A feladat "lényegének" megértése a cél.
  - Hogy lehet egy ilyen feladatot kitalálni?

Az általános iskolás: mit tud, ami hasznos lehet?

Mit tanul egy általános iskolás?

Az általános iskolás: mit tud, ami hasznos lehet?

Mit tanul egy általános iskolás?
MOZAIK: Sokszínű matematika - 8.
TARTALOMJEGYZÉK
Algebra

Az általános iskolás: mit tud, ami hasznos lehet?

Mit tanul egy általános iskolás?
MOZAIK: Sokszínű matematika - 8.
TARTALOMJEGYZÉK
Algebra

1. Algebrai kifejezések (emlékeztető)
2. Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket?
3. Többtagú algebrai kifejezések szorzása
4. Összeg, különbség négyzete (kiegészítő anyag)
5. Összeg és különbség szorzata (kiegészítő anyag)
6. Kiemelés, szorzattá alakítás
7. Algebrai törtek (kiegészítő anyag)
8. Egyenletek megoldása szorzattá alakítással
9. Vegyes feladatok

Az általános iskolás: első ötlet

A feladat még egyszer

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Az általános iskolás: első ötlet

A feladat még egyszer

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Első ötlet: Szorozzunk be $(a-b)(a-c)(b-c)$-vel!

Az általános iskolás: első ötlet

A feladat még egyszer

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Első ötlet: Szorozzunk be $(a-b)(a-c)(b-c)$-vel!

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b)=$$

$$=x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

Az általános iskolás: első ötlet

A feladat még egyszer

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Első ötlet: Szorozzunk be $(a-b)(a-c)(b-c)$-vel!

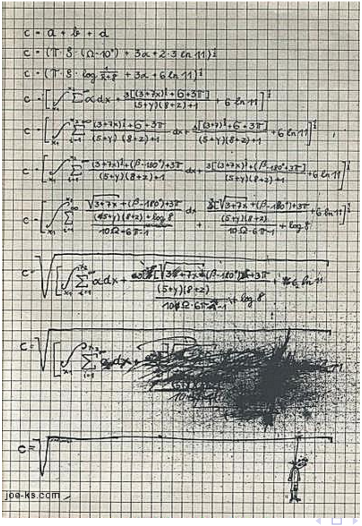
$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b)=$$

$$=x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

Bontsuk fel a zárójeleket!

Vigyázat!

Könnyen így járhatunk:



Az általános iskolás: első ötlet

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b) =$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

Az általános iskolás: első ötlet

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b) =$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

A felbontás után a bal oldalon 24 ötödfokú tag lesz (pl. a^2x^2b), a jobb oldalon "csak" 8.

Az általános iskolás: első ötlet

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b) =$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

A felbontás után a bal oldalon 24 ötödfokú tag lesz (pl. a^2x^2b), a jobb oldalon "csak" 8.
Ez nagyon fáradságos munka, egyáltalán biztosak lehetünk abban, hogy ha végigcsináljuk, sikerrel járunk?

Az általános iskolás: első ötlet

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b) =$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

A felbontás után a bal oldalon 24 ötödfokú tag lesz (pl. a^2x^2b), a jobb oldalon "csak" 8.
Ez nagyon fáradságos munka, egyáltalán biztosak lehetünk abban, hogy ha végigcsináljuk, sikerrel járunk? (Azaz összevonások után **azonosságot** kapunk?)

Az általános iskolás: első ötlet

$$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b) =$$

$$= x^2(a-b)(a-c)(b-c).$$

A felbontás után a bal oldalon 24 ötödfokú tag lesz (pl. a^2x^2b), a jobb oldalon "csak" 8.

Ez nagyon fáradságos munka, egyáltalán biztosak lehetünk abban, hogy ha végigcsináljuk, sikerrel járunk? (Azaz összevonások után **azonosságot** kapunk?)

A válasz: IGEN. $\rightarrow$ Egyetemi anyag

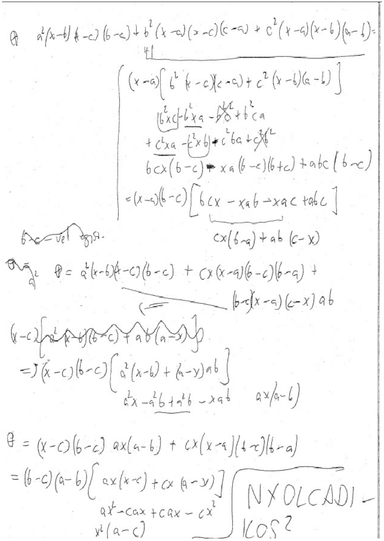
Az általános iskolás: egyszerűbb megoldás?

Az általános iskolás: egyszerűbb megoldás?

Ügyes kiemelésekkel (melyek megtalálása kellő gyakorlatot igényel), szelídíthető a számolás, de egy ilyen megoldást megtalálni lehet, hogy több idő, mint felbontani a zárójeleket.

Az általános iskolás: egyszerűbb megoldás?

Ügyes kiemelésekkel (melyek megtalálása kellő gyakorlatot igényel), szelídíthető a számolás, de egy ilyen megoldást megtalálni lehet, hogy több idő, mint felbontani a zárójeleket.



$a^2(x-b)(x-c)(b-c)+b^2(x-a)(x-c)(c-a)+c^2(x-a)(x-b)(a-b)=$

$(x-a)\left[b^2(x-c)(c-a)+c^2(x-b)(a-b)\right]$

$bcx(b-c)-xa(b-c)(b+c)+abc(b-c)$

$=(x-a)(b-c)\left[bcx-xab-xac+abc\right]$

$cx(b-a)+ab(c-x)$

$=(x-c)(b-c)\left[a^2(x-b)+(a-x)ab\right]$

$a^2x-a^2b+a^2b-xab \qquad ax(a-b)$

$=(x-c)(b-c)\,ax(a-b)+cx(x-a)(b-c)(b-a)$

$=(b-c)(a-b)\left[ax(x-c)+cx(a-x)\right]$

$ax^2-cax+cax-cx^2$

$x^2(a-c)$

NYOLCADIKOS?

A középiskolás

A feladatunk

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

A középiskolás

A feladatunk

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Megoldás.

Első megfigyelés: x valamilyen szempontból megkülönböztetett szerepet játszik.

A középiskolás

A feladatunk

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Megoldás.

Első megfigyelés: x valamilyen szempontból megkülönböztetett szerepet játszik.
Rendezzünk mindent tagot a bal oldalra, rögzítsük a, b, c-t és tekintsünk úgy a bal oldalra, mint x függvényére.

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=0.$$

$$f(x)=0.$$

A középiskolás

Megoldás.

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=0.$$

A bal oldal (rögzített a, b, c mellett) legfeljebb(!) másodfokú polinomfüggvény,

A középiskolás

Megoldás.

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=0.$$

A bal oldal (rögzített a, b, c mellett) legfeljebb(!) másodfokú polinomfüggvény, melynek jól láthatóan gyökei a, b, c.

A középiskolás

Megoldás.

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=0.$$

A bal oldal (rögzített a, b, c mellett) legfeljebb(!) másodfokú polinomfüggvény, melynek jól láthatóan gyökei a, b, c.
Azt tudjuk, hogy egy másodfokú függvénynek 0, 1 vagy 2 darab gyöke lehet,

A középiskolás

Megoldás.

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x^2=0.$$

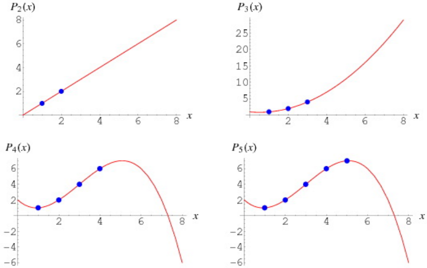
A bal oldal (rögzített a, b, c mellett) legfeljebb(!) másodfokú polinomfüggvény, melynek jól láthatóan gyökei a, b, c.
Azt tudjuk, hogy egy másodfokú függvénynek 0, 1 vagy 2 darab gyöke lehet, ennek pedig 3 (különböző) gyöke van, tehát a bal oldalon valóban az azonosan 0 polinomnak kell állnia.
Készen vagyunk.

Egy gyakorlati probléma

Adottak pontok a koordináta-rendszerben (pl. mérési eredmények), illesszünk rájuk "szép" függvényeket.

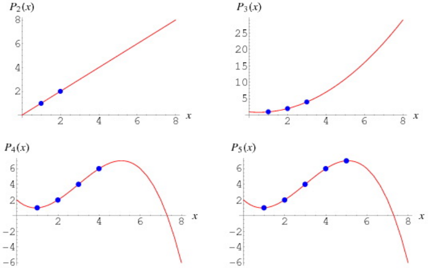
Egy gyakorlati probléma

Adottak pontok a koordináta-rendszerben (pl. mérési eredmények), illesszünk rájuk "szép" függvényeket.



Egy gyakorlati probléma

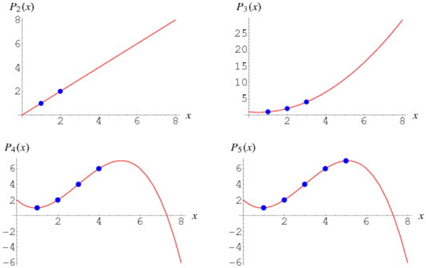
Adottak pontok a koordináta-rendszerben (pl. mérési eredmények), illesszünk rájuk "szép" függvényeket.



Mi számít szép függvénynek?

Egy gyakorlati probléma

Adottak pontok a koordináta-rendszerben (pl. mérési eredmények), illesszünk rájuk "szép" függvényeket.



Mi számít szép függvénynek?
(Sok szempontból) legszebb függvények: polinomfüggvények.

Egy gyakorlati probléma

Probléma.

Adjunk meg egy olyan legfeljebb n-edfokú $p(x)$ polinomot, melyre különböző x_0, x_1, ..., x_n helyeken

$$p(x_0) = c_0,\; p(x_1) = c_1,\; \dots\;,\; p(x_n) = c_n. \tag{1}$$

Egy gyakorlati probléma

Probléma.

Adjunk meg egy olyan legfeljebb n-edfokú $p(x)$ polinomot, melyre különböző $x_0, x_1, \ldots, x_n$ helyeken

$$p(x_0) = c_0,\ p(x_1) = c_1,\ \ldots\ ,\ p(x_n) = c_n. \tag{1}$$

Megoldás.

Észrevétel: elegendő lenne olyan polinomokat találnunk, melyek az adott helyek egyikén az adott értékeket veszik fel, a többi helyen pedig 0-t, hiszen ezek összege megfelelő lenne.

Egy gyakorlati probléma

Probléma.

Adjunk meg egy olyan legfeljebb n-edfokú $p(x)$ polinomot, melyre különböző x_0, x_1, ..., x_n helyeken

$$p(x_0) = c_0,\ p(x_1) = c_1,\ \ldots\ ,\ p(x_n) = c_n. \tag{1}$$

Megoldás.

Észrevétel: elegendő lenne olyan polinomokat találnunk, melyek az adott helyek egyikén az adott értékeket veszik fel, a többi helyen pedig 0-t, hiszen ezek összege megfelelő lenne.
Tulajdonképpen elegendő lenne olyan polinomokat találnunk, amelyek az adott helyek egyikén nem 0 értéket vesznek fel, a többin pedig 0-t, hiszen ezeket megfelelő konstansokkal beszorozva megkapnánk az előző észrevételben óhajtottakat.

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen.

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen. Milyen konstanssal kell ezeket beszorozni, hogy $x=x_i$ helyen éppen c_i helyettesítési értéket adjanak?

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen. Milyen konstanssal kell ezeket beszorozni, hogy $x=x_i$ helyen éppen c_i helyettesítési értéket adjanak? Ez sem nehéz, legyen:

$$p_i(x)=c_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen. Milyen konstanssal kell ezeket beszorozni, hogy $x=x_i$ helyen éppen c_i helyettesítési értéket adjanak? Ez sem nehéz, legyen:

$$p_i(x)=c_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Ezekkel tehát már megadhatjuk a keresett polinomunkat, ugyanis: $p(x)=p_0(x)+p_1(x)+\ldots+p_n(x)$.

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen. Milyen konstanssal kell ezeket beszorozni, hogy $x = x_i$ helyen éppen c_i helyettesítési értéket adjanak? Ez sem nehéz, legyen:

$$p_i(x) = c_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Ezekkel tehát már megadhatjuk a keresett polinomunkat, ugyanis: $p(x) = p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_n(x)$.

Ezt a módszert Langrange-interpolációnak nevezik.

Egy gyakorlati probléma

Megoldás (folytatás).

$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)$ jól láthatóan ilyen. Milyen konstanssal kell ezeket beszorozni, hogy $x=x_i$ helyen éppen c_i helyettesítési értéket adjanak? Ez sem nehéz, legyen:

$$p_i(x)=c_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Ezekkel tehát már megadhatjuk a keresett polinomunkat, ugyanis: $p(x)=p_0(x)+p_1(x)+\ldots+p_n(x)$.

Ezt a módszert Langrange-interpolációnak nevezik.
Megjegyzés. Tetszőleges $c_0, c_1, \ldots, c_n$ valós számokhoz és különböző $x_0, x_1, \ldots, x_n$ helyekhez pontosan egy megfelelő polinom létezik, ezt konstruáltuk meg.

Példa Lagrange-interpolációra

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvényre három pontja alapján a Lagrange-interpolációs polinomot.

Példa Lagrange-interpolációra

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvényre három pontja alapján a Lagrange-interpolációs polinomot.
Nyilván a kapott másodfokú függvény meg kell, hogy egyezzen x^2-tel.

Példa Lagrange-interpolációra

Írjuk fel az $f(x) = x^2$ függvényre három pontja alapján a Lagrange-interpolációs polinomot.
Nyilván a kapott másodfokú függvény meg kell, hogy egyezzen x^2-tel.
Legyen a három különböző pontunk $a \neq b \neq c$. Ekkor az előbb meghatározott Lagrange-interpolációs polinom:

Példa Lagrange-interpolációra

$$f(x) = x^2 = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) =$$

Példa Lagrange-interpolációra

$$f(x) = x^2 = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) =$$

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Példa Lagrange-interpolációra

$$f(x) = x^2 = p_1(x) + p_2(x) + p_3(x) =$$

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Kalmár László Matematikaverseny, 8. osztály, országos döntő, 2001, 1. versenynap, 4. feladat

Az a, b, c adott, különböző számok. Igazoljuk minél egyszerűbben, hogy a következő egyenlőség minden x-re igaz:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2.$$

Egy "triviális" alkalmazás

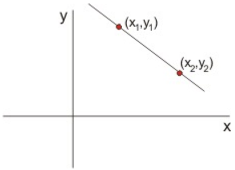
Egyenes egyenlete.

Keressük az (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenletét.

Egy "triviális" alkalmazás

Egyenes egyenlete.

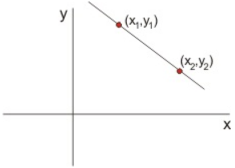
Keressük az (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenletét.



Egy "triviális" alkalmazás

Egyenes egyenlete.

Keressük az (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenletét.



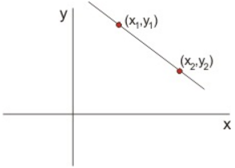
Megoldás.

Fogalmazzuk át a problémát. Keressük azt az elsőfokú $f(x)$ polinomot, melyre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$.

Egy "triviális" alkalmazás

Egyenes egyenlete.

Keressük az (x_1, y_1), (x_2, y_2) pontokon átmenő egyenes egyenletét.



Megoldás.

Fogalmazzuk át a problémát. Keressük azt az elsőfokú $f(x)$ polinomot, melyre $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Lagrange-interpolációval ez:

$$y = f(x_1)\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = y_1\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2\frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

melyet átrendezve a már ismert összefüggést kapjuk.

Egy apró feladat

Folytassuk!

$1, 2, 4, 8, \ldots ?$

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, ...?

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n, \ldots$$

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, ...?

$\cancel{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n, \ldots}$ Ennyire azért nem apró ...

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, ...?

~~1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ...~~ Ennyire azért nem apró ...

A megoldás: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, ... ????????

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, . . .?

$\cancel{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \dots,\ 2^n,\dots}$ Ennyire azért nem apró . . .

A megoldás: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, . . . ????????
$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8$ alapján Lagrange interpoláljunk:

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, . . .?

~~1, 2, 4, 8, 16, 32, . . . , 2^n, . . .~~ Ennyire azért nem apró . . .

A megoldás: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, . . . ????????
$f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$ alapján Lagrange interpoláljunk:

$$8\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} + 4\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(2-3)} =$$

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, ...?

$\cancel{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n, \ldots}$ Ennyire azért nem apró ...

A megoldás: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, ... ????????
$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8$ alapján Lagrange interpoláljunk:

$$8\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} + 4\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} + 1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(2-3)} =$$

$$= \frac{x^3 + 5x + 6}{6}$$

Egy apró feladat

Folytassuk!

1, 2, 4, 8, …?

~~$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,\ 2^n,\ldots$~~ Ennyire azért nem apró …

A megoldás: 1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, 64, … ????????
$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=8$ alapján Lagrange interpoláljunk:

$$8\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}+4\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}+2\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}+1\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(2-3)}=$$

$$=\frac{x^3+5x+6}{6}$$

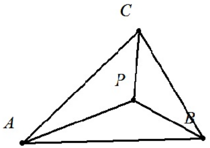
Hf.: Bizonyítsuk be, hogy x db. általános helyzetű sík éppen ennyi részre osztja a teret!

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Feladat.

Adott ABC háromszög és síkjában egy P pont.
Igazoljuk, hogy

$$\frac{PA}{BC} + \frac{PB}{CA} + \frac{PC}{AB} \geq \sqrt{3}.$$

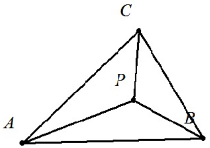


Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Feladat.

Adott ABC háromszög és síkjában egy P pont. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PA}{BC}+\frac{PB}{CA}+\frac{PC}{AB}\geq\sqrt{3}.$$



Megoldás.

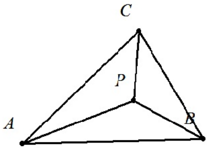
A komplex (Gauss-féle) számsíkon fogunk dolgozni. Legyenek az A, B, C, P pontok helyvektorainak megfelelő komplex számok rendre a, b, c, x.

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Feladat.

Adott ABC háromszög és síkjában egy P pont. Igazoljuk, hogy

$$\frac{PA}{BC}+\frac{PB}{CA}+\frac{PC}{AB}\geq\sqrt{3}.$$



Megoldás.

A komplex (Gauss-féle) számsíkon fogunk dolgozni. Legyenek az A, B, C, P pontok helyvektorainak megfelelő komplex számok rendre a, b, c, x. A konstans 1 polinomra, mint legfeljebb másodfokú polinomra felírva a Lagrange-interpolációs polinomot az a, b, c pontokban:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}=1.$$

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Megoldás.

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget és a komplex számok abszolútértékének megfelelő tulajdonságait, az előzőből

$$\frac{|x-a||x-b|}{|c-a||c-b|}+\frac{|x-b||x-c|}{|a-b||a-c|}+\frac{|x-a||x-c|}{|b-a||b-c|}\geq 1,$$

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Megoldás.

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget és a komplex számok abszolútértékének megfelelő tulajdonságait, az előzőből

$$\frac{|x-a||x-b|}{|c-a||c-b|}+\frac{|x-b||x-c|}{|a-b||a-c|}+\frac{|x-a||x-c|}{|b-a||b-c|}\geq 1,$$

adódik, mely éppen

$$\frac{PA}{CA}\frac{PB}{CB}+\frac{PB}{AB}\frac{PC}{AC}+\frac{PA}{BA}\frac{PC}{BC}\geq 1.$$

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Megoldás.

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget és a komplex számok abszolútértékének megfelelő tulajdonságait, az előzőből

$$\frac{|x-a||x-b|}{|c-a||c-b|}+\frac{|x-b||x-c|}{|a-b||a-c|}+\frac{|x-a||x-c|}{|b-a||b-c|}\geq 1,$$

adódik, mely éppen

$$\frac{PA}{CA}\frac{PB}{CB}+\frac{PB}{AB}\frac{PC}{AC}+\frac{PA}{BA}\frac{PC}{BC}\geq 1.$$

$r=\frac{PA}{CB}$, $s=\frac{PB}{CA}$, $t=\frac{PC}{AB}$ jelöléssel ez

$$rs+st+rt\geq 1$$

alakú.

Valami nagyon más (vagy mégsem?)

Megoldás.

Felhasználva a háromszög-egyenlőtlenséget és a komplex számok abszolútértékének megfelelő tulajdonságait, az előzőből

$$\frac{|x-a||x-b|}{|c-a||c-b|}+\frac{|x-b||x-c|}{|a-b||a-c|}+\frac{|x-a||x-c|}{|b-a||b-c|}\geq 1,$$

adódik, mely éppen

$$\frac{PA}{CA}\frac{PB}{CB}+\frac{PB}{AB}\frac{PC}{AC}+\frac{PA}{BA}\frac{PC}{BC}\geq 1.$$

$r=\frac{PA}{CB}$, $s=\frac{PB}{CA}$, $t=\frac{PC}{AB}$ jelöléssel ez

$$rs+st+rt\geq 1$$

alakú. Felhasználva az ismert $(r+s+t)^2\geq 3(rs+st+tr)$ egyenlőtlenséget, ebből éppen

$$\frac{PA}{BC}+\frac{PB}{CA}+\frac{PC}{AB}=r+s+t\geq\sqrt{3(rs+st+tr)}\geq\sqrt{3}.$$

Köszönöm a megtisztelő figyelmet![1]

[1] A vetítés anyaga megtalálható lesz a honlapomon:
www.stud.u-szeged.hu/Kunos.Adam/
Megjegyzéseket, észrevételeket, véleményeket, egyszerűbb megoldásokat szeretettel várok: **kunosadam@gmail.com**