Elsőrendű definiálhatóság a véges irányított gráfok beágyazás-részbenrendezésében II.

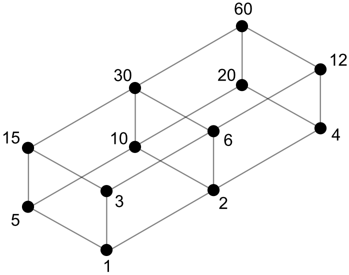
Kunos Ádám

Témavezető: dr. Maróti Miklós

Szeged, 2014. május 28.

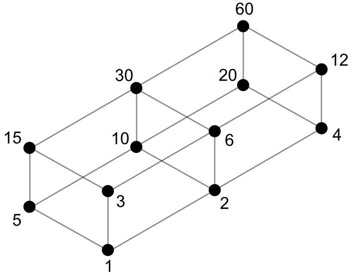
A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program'' című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban



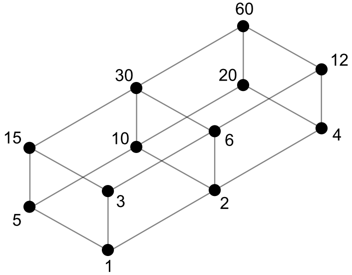
Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\}$



Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

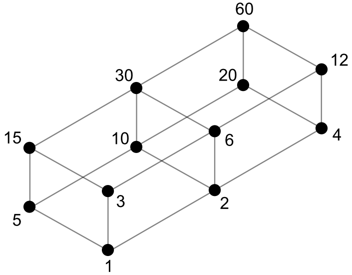
$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$



Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

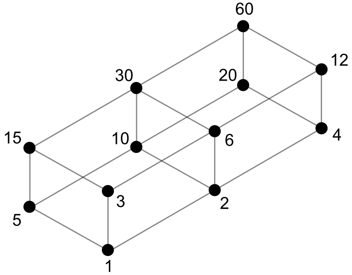


Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} =$

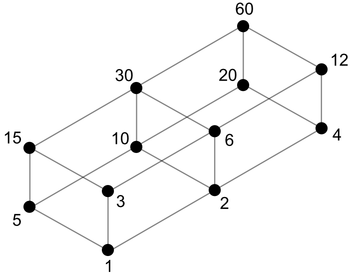


Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{\text{az 1 rákövetkezői}\}$

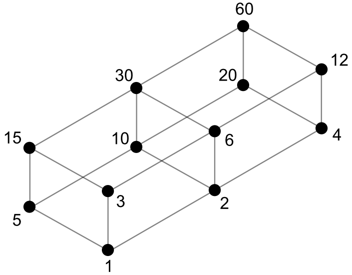


Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{$az 1 rákövetkezői$\}$



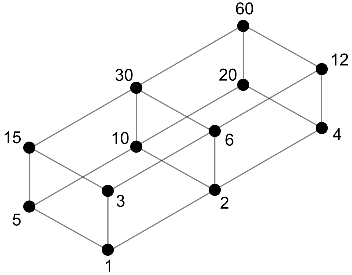
$$\prec = \{(x, y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$$

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$$\begin{aligned}\{2, 3, 5\} &= \{\text{az 1 rákövetkezői}\}\\ &= \{x : 1 \prec x\}\end{aligned}$$



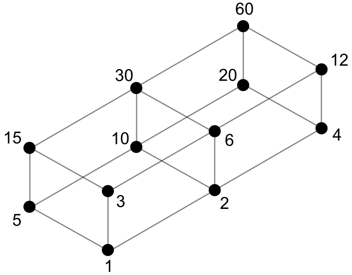
$$\prec = \{(x, y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$$

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$$\begin{aligned}\{2,3,5\} &= \{\text{az 1 rákövetkezői}\}\\ &= \{x : 1 \prec x\}\end{aligned}$$



$\prec = \{(x,y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$

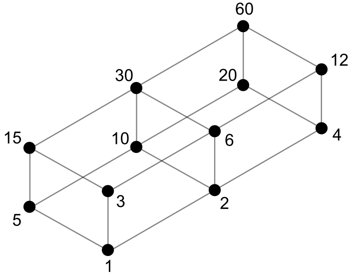
$\{3,5\}$

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$$\begin{aligned}\{2,3,5\} &= \{\text{az 1 rákövetkezői}\}\\ &= \{x : 1 \prec x\}\end{aligned}$$



$$\prec = \{(x,y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$$

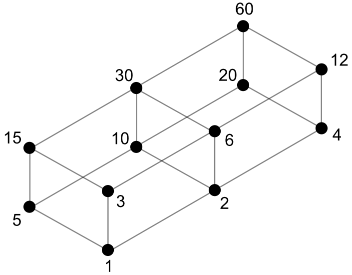
$\{3,5\} = \{x : 1 \prec x,\ x\text{-nek pontosan két rákövetkezője van}\}$

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{\text{az 1 rákövetkezői}\}$
$\qquad\quad = \{x : 1 \prec x\}$



$\prec = \{(x, y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$

$\{3, 5\} = \{x : 1 \prec x, \ x\text{-nek pontosan két rákövetkezője van}\}$

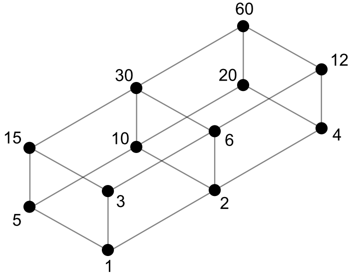
$\{3\} = \{x : ???\}$

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$$\begin{aligned}\{2,3,5\} &= \{\text{az 1 rákövetkezői}\} \\ &= \{x : 1 \prec x\}\end{aligned}$$



$\prec = \{(x,y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$

$\{3,5\} = \{x : 1 \prec x,\ x\text{-nek pontosan két rákövetkezője van}\}$

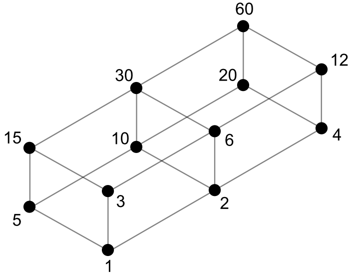
$\{3\} = \{x : ???\}$ Sejtés: NINCS alkalmas formula

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

$\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$

$\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{\text{az 1 rákövetkezői}\}$
$\qquad = \{x : 1 \prec x\}$



$\prec = \{(x, y) : x \leq y \ \wedge \ x \neq y \wedge (\forall z)(x \leq z \leq y \ \Rightarrow \ z = x \ \vee \ z = y)\}$

$\{3, 5\} = \{x : 1 \prec x,\ x\text{-nek pontosan két rákövetkezője van}\}$

$\{3\} = \{x : ???\}$ Sejtés: NINCS alkalmas formula

Bizonyítás: egy automorfizmus: $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, I: finite semilattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 59-75.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, II: finite ordered sets.* Order **27**, 2010, 115-145.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, III: finite distributive lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 283-300.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, IV: finite lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 301-312.

Alapkoncepció: $A \leq B \iff A$ izomorf B egy feszített részstruktúrájával.

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus:

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

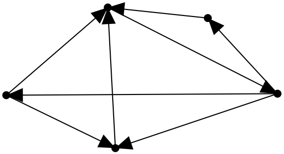
$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

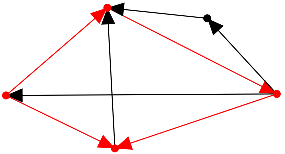


Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

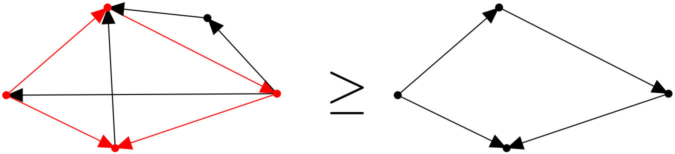


Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

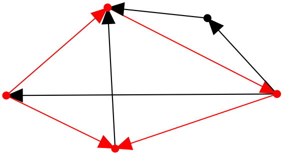


Irányított gráfok

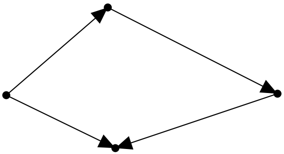
$\mathcal{D}$: A véges irányított gráfok (izomorfiatípusainak) halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív homomorfizmus: $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

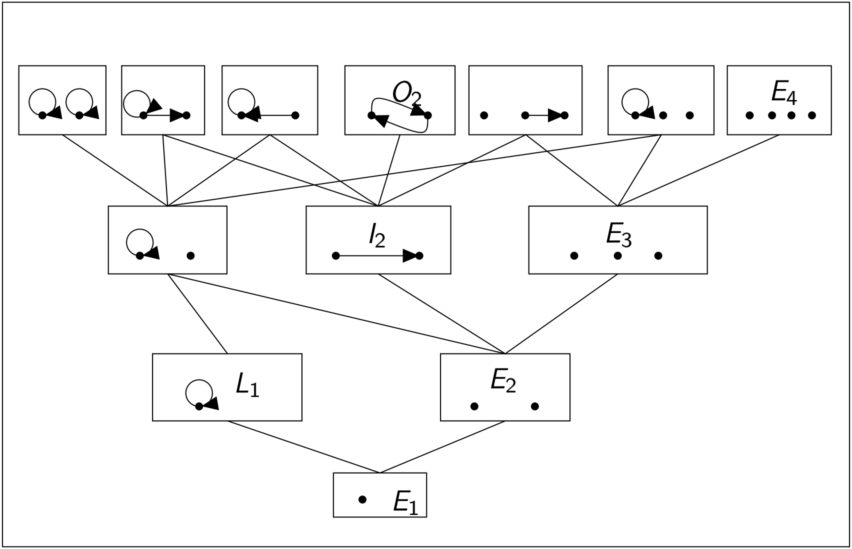


$$\geq$$



$\leq$ reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, úgyhogy $(\mathcal{D}; \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

A $(\mathcal{D};\leq)$ részbenrendezett halmaz "alja"



A szakdolgozat eredménye és következményei

A $G \mapsto G^T$ leképezés (nyilak megfordítása) nemtriviális automorfizmusa a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak.

A szakdolgozat eredménye és következményei

A $G \mapsto G^T$ leképezés (nyilak megfordítása) nemtriviális automorfizmusa a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel (szakdolgozatom eredménye)

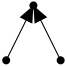
A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmazban a $\{G, G^T\}$ halmaz minden $G \in \mathcal{D}$ esetén elsőrendű definiálható.

A szakdolgozat eredménye és következményei

A $G \mapsto G^T$ leképezés (nyilak megfordítása) nemtriviális automorfizmusa a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel (szakdolgozatom eredménye)

A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmazban a $\{G, G^T\}$ halmaz minden $G \in \mathcal{D}$ esetén elsőrendű definiálható.

A: 

A szakdolgozat eredménye és következményei

A $G \mapsto G^T$ leképezés (nyilak megfordítása) nemtriviális automorfizmusa a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel (szakdolgozatom eredménye)

A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmazban a $\{G, G^T\}$ halmaz minden $G \in \mathcal{D}$ esetén elsőrendű definiálható.

A: 

Következmény

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúrában minden $G \in \mathcal{D}$ definiálható.

A szakdolgozat eredménye és következményei

A $G \mapsto G^T$ leképezés (nyilak megfordítása) nemtriviális automorfizmusa a $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak.

Tétel (szakdolgozatom eredménye)

A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmazban a $\{G, G^T\}$ halmaz minden $G \in \mathcal{D}$ esetén elsőrendű definiálható.

A: 

Következmény

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúrában minden $G \in \mathcal{D}$ definiálható.

Következmény

A $(\mathcal{D}; \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van: $G \mapsto G^T$. Következésképpen automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D}: \; G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$.

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D}: \; G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$. Ezzel a véges részhalmazok definiálhatósága le van rendezve.

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D}: \; G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$. Ezzel a véges részhalmazok definiálhatósága le van rendezve.

Mi a helyzet a végtelen részhalmazokkal? Ezekről tudunk-e mondani valamit eddigi ismereteink alapján?

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D} : \; G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$. Ezzel a véges részhalmazok definiálhatósága le van rendezve.

Mi a helyzet a végtelen részhalmazokkal? Ezekről tudunk-e mondani valamit eddigi ismereteink alapján? **NEM**

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D}: \ G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$. Ezzel a véges részhalmazok definiálhatósága le van rendezve.

Mi a helyzet a végtelen részhalmazokkal? Ezekről tudunk-e mondani valamit eddigi ismereteink alapján? **NEM**

Természetes volna megkérdezni, hogy például a gyengén összefüggő irányított gráfok halmaza definiálható-e.

Mit tudunk eddig és mi újat hoz a diplomamunka?

Tudjuk, hogy egy véges $H \subseteq \mathcal{D}$ részhalmaz akkor és csak akkor elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ben, ha: $\forall G \in \mathcal{D} : \; G \in H \Leftrightarrow G^T \in H$. Ezzel a véges részhalmazok definiálhatósága le van rendezve.

Mi a helyzet a végtelen részhalmazokkal? Ezekről tudunk-e mondani valamit eddigi ismereteink alapján? **NEM**

Természetes volna megkérdezni, hogy például a gyengén összefüggő irányított gráfok halmaza definiálható-e. Diplomamunkámban egy ilyen jellegű kérdések megválaszolásához szükséges eszköztárat építek fel.

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$= O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$= O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$=$ $O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$= O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$= O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Négy konstans:

- $\mathbf{E}_1 \in O^{\mathcal{CD}}: \quad V(\mathbf{E}_1) = \{1\},\ E(\mathbf{E}_1) = \emptyset,$

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$=$ $O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Négy konstans:

- $\mathbf{E}_1 \in O^{\mathcal{CD}}$: $\quad V(\mathbf{E}_1) = \{1\}$, $E(\mathbf{E}_1) = \emptyset$,
- $\mathbf{I}_2 \in O^{\mathcal{CD}}$: $\quad V(\mathbf{I}_2) = \{1, 2\}$, $E(\mathbf{E}_1) = \{(1, 2)\}$,

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$=O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Négy konstans:

- $\mathbf{E}_1 \in O^{\mathcal{CD}}$: $\quad V(\mathbf{E}_1) = \{1\}$, $E(\mathbf{E}_1) = \emptyset$,
- $\mathbf{I}_2 \in O^{\mathcal{CD}}$: $\quad V(\mathbf{I}_2) = \{1, 2\}$, $E(\mathbf{E}_1) = \{(1, 2)\}$,
- $\mathbf{f}_1 \in CD(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2)$: $\quad \mathbf{f}_1 = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto 1\}, \mathbf{I}_2)$,

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok= $O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B \text{ homomorfizmus}\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Négy konstans:

- $\mathbf{E}_1 \in O^{\mathcal{CD}}: \quad V(\mathbf{E}_1) = \{1\},\ E(\mathbf{E}_1) = \emptyset,$
- $\mathbf{I}_2 \in O^{\mathcal{CD}}: \quad V(\mathbf{I}_2) = \{1, 2\},\ E(\mathbf{E}_1) = \{(1, 2)\},$
- $\mathbf{f}_1 \in CD(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): \quad \mathbf{f}_1 = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto 1\}, \mathbf{I}_2),$
- $\mathbf{f}_2 \in CD(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): \quad \mathbf{f}_2 = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto 2\}, \mathbf{I}_2).$

Egy kis kategória

$\mathcal{CD}$: egy kis kategória a következőkkel:

- objektumok$= O^{\mathcal{CD}}$: irányított gráfok $\{1, \dots, n\}$ csúcshalmazzal
- morfizmusok: $A, B \in O^{\mathcal{CD}}$:
  $CD(A, B) = \{(A, \alpha, B) : \alpha : A \to B$ homomorfizmus$\}$
- $\mathrm{id}_A \in CD(A, A)$
- $f = (A, \alpha, B)$, $g = (B, \beta, C)$: $fg = (A, \beta \circ \alpha, C)$

Négy konstans:

- $\mathbf{E}_1 \in O^{\mathcal{CD}}: \quad V(\mathbf{E}_1) = \{1\},\ E(\mathbf{E}_1) = \emptyset,$
- $\mathbf{I}_2 \in O^{\mathcal{CD}}: \quad V(\mathbf{I}_2) = \{1, 2\},\ E(\mathbf{E}_1) = \{(1, 2)\},$
- $\mathsf{f}_1 \in CD(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): \quad \mathsf{f}_1 = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto 1\}, \mathbf{I}_2),$
- $\mathsf{f}_2 \in CD(\mathbf{E}_1, \mathbf{I}_2): \quad \mathsf{f}_2 = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto 2\}, \mathbf{I}_2).$

$\mathcal{CD}' = \mathcal{CD} +$ a négy konstans

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{C}\mathcal{D}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Megfigyelés: $L_{\mathcal{CD}'}$-vel kifejezhető irányított gráfok beágyazhatósága és izmorfiája is.

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Megfigyelés: $L_{\mathcal{CD}'}$-vel kifejezhető irányított gráfok beágyazhatósága és izmorfiája is.

Egy morfizmus $f \in CD(A, B)$

- injektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g, h \in CD(X, A) : \quad gf = hf \Leftrightarrow g = h$,
- szürjektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g, h \in CD(B, X) : \quad fg = fh \Leftrightarrow g = h$.

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Megfigyelés: $L_{\mathcal{CD}'}$-vel kifejezhető irányított gráfok beágyazhatósága és izmorfiája is.

Egy morfizmus $f \in CD(A, B)$

- injektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}} \ \ \forall g, h \in CD(X, A): \ \ gf = hf \Leftrightarrow g = h$,
- szürjektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}} \ \ \forall g, h \in CD(B, X): \ \ fg = fh \Leftrightarrow g = h$.

Ez azt jelenti, hogy az összes (n-változós) reláció, ami elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq)$-ban, elsőrendű definiálható $\mathcal{CD}'$-ban is.

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Megfigyelés: $L_{\mathcal{CD}'}$-vel kifejezhető irányított gráfok beágyazhatósága és izmorfiája is.

Egy morfizmus $f \in CD(A,B)$

- injektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g,h \in CD(X,A):\ \ gf = hf \Leftrightarrow g = h$,
- szürjektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g,h \in CD(B,X):\ \ fg = fh \Leftrightarrow g = h$.

Ez azt jelenti, hogy az összes (n-változós) reláció, ami elsőrendű definiálható $(\mathcal{D};\leq)$-ban, elsőrendű definiálható $\mathcal{CD}'$-ban is. Ezt $\mathrm{Def}[(\mathcal{D};\leq)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ módon fogjuk jelölni.

Néhány nyelv

- $L_{\mathcal{CD}'}$: a kategóriák elsőrendű nyelve + a 4 konstans
- $L_{(\mathcal{D};\leq,A)}$: a részbenrendezett halmazok elsőrendű nyelve + A
- $L_{\rightarrow}$: az irányított gráfok elsőrendű nyelve
- $L^2_{\rightarrow}$: az irányított gráfok (teljes) másodrendű nyelve

Megfigyelés: $L_{\mathcal{CD}'}$-vel kifejezhető irányított gráfok beágyazhatósága és izmorfiája is.

Egy morfizmus $f \in CD(A,B)$

- injektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g,h \in CD(X,A): \quad gf = hf \Leftrightarrow g = h$,
- szürjektív $\Leftrightarrow \forall X \in O^{\mathcal{CD}}\ \ \forall g,h \in CD(B,X): \quad fg = fh \Leftrightarrow g = h$.

Ez azt jelenti, hogy az összes (n-változós) reláció, ami elsőrendű definiálható $(\mathcal{D};\leq)$-ban, elsőrendű definiálható $\mathcal{CD}'$-ban is. Ezt $\mathrm{Def}[(\mathcal{D};\leq)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ módon fogjuk jelölni. Egyszerű megmutatni, hogy $\mathrm{Def}[(\mathcal{D};\leq,A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ is teljesül.

$\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el.

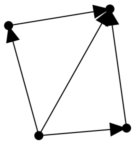
$\mathrm{Def}[L_{\to}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így $\mathrm{Def}[L_{\to}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ teljesül.

$\mathrm{Def}[L_\rightarrow] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így $\mathrm{Def}[L_\rightarrow] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ teljesül.

Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re,

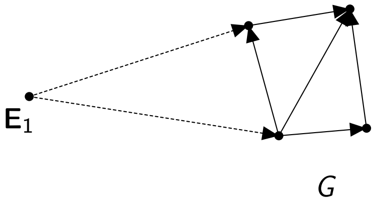


G

Def$[L_{\rightarrow}] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így Def$[L_{\rightarrow}] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$ teljesül.

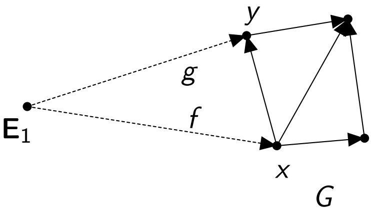
Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel.



$\mathrm{Def}[L_{\to}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így $\mathrm{Def}[L_{\to}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ teljesül.

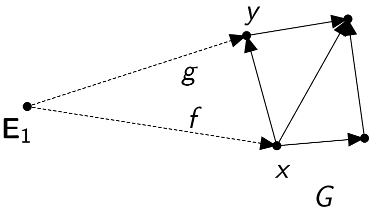
Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel. Legyen $f = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto x\}, G)$, $\ g = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto y\}, G)$ $\ (x, y \in V(G))$.



Def$[L_{\rightarrow}] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így Def$[L_{\rightarrow}] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$ teljesül.

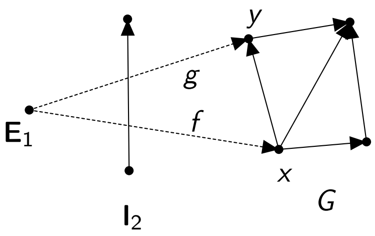
Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel. Legyen $f = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto x\}, G)$, $g = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto y\}, G)$ $(x, y \in V(G))$. $(x, y) \in E(G)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha



$\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

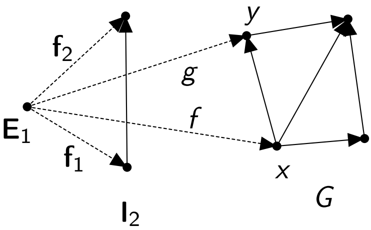
A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok “belső szerkezete” nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így $\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ teljesül.

Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel. Legyen $f = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto x\}, G)$, $g = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto y\}, G)$ $(x, y \in V(G))$. $(x, y) \in E(G)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha



A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így Def[$L_{\to}$] $\subseteq$ Def[$\mathcal{CD}'$] teljesül.

Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel. Legyen $f = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto x\}, G)$, $g = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto y\}, G)$ $(x, y \in V(G))$. $(x, y) \in E(G)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

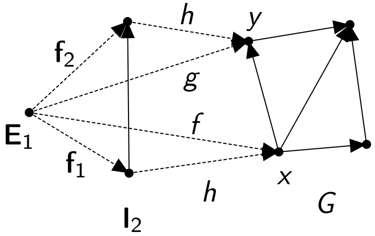


Def$[L_\rightarrow] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$

A $(\mathcal{D}; \leq, A)$ struktúra elsőrendű nyelvével az irányított gráfok "belső szerkezete" nem érhető el. Meglepő módon, a $\mathcal{CD}'$ struktúra elsőrendű nyelvével el tudjuk érni az irányíott gráfok belső szerkezetét, így Def$[L_\rightarrow] \subseteq$ Def$[\mathcal{CD}']$ teljesül.

Tetszőleges $G \in O^{\mathcal{CD}}$-re, $CD(\mathbf{E}_1, G)$ természetes módon bijektív $V(G)$-vel. Legyen $f = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto x\}, G)$, $g = (\mathbf{E}_1, \{1 \mapsto y\}, G)$ $(x, y \in V(G))$. $(x, y) \in E(G)$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\exists h \in CD(\mathbf{I}_2, G): \quad \mathbf{f}_1 h = f,\ \mathbf{f}_2 h = g.$$



A végső eredmény

Már láttuk:

- $\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$
- $\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

A végső eredmény

Már láttuk:

- $\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$
- $\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

Ezeken túl még $\mathrm{Def}[L^2_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ is bizonyítható.

A végső eredmény

Már láttuk:

- $\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$
- $\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

Ezeken túl még $\mathrm{Def}[L^2_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ is bizonyítható.
$L_{\mathcal{CD}'}$ tűnik messzemenően a legerősebbnek...

A végső eredmény

Már láttuk:

- $\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$
- $\mathrm{Def}[L_\rightarrow] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

Ezeken túl még $\mathrm{Def}[L^2_\rightarrow] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ is bizonyítható.
$L_{\mathcal{CD}'}$ tűnik messzemenően a legerősebbnek...

Tétel ($\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \supseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$)

Minden izomorfizmus-invariáns reláció, ami elsőrendű definiálható $\mathcal{CD}'$-ben, elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq, A)$-ban is.

A végső eredmény

Már láttuk:

- $\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$
- $\mathrm{Def}[L_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$

Ezeken túl még $\mathrm{Def}[L^2_{\rightarrow}] \subseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$ is bizonyítható.
$L_{\mathcal{CD}'}$ tűnik messzemenően a legerősebbnek...

Tétel ($\mathrm{Def}[(\mathcal{D}; \leq, A)] \supseteq \mathrm{Def}[\mathcal{CD}']$)

Minden izomorfizmus-invariáns reláció, ami elsőrendű definiálható $\mathcal{CD}'$-ben, elsőrendű definiálható $(\mathcal{D}; \leq, A)$-ban is.

Következmény

A gyengén összefüggő irányított gráfok halmaza definiálható $(\mathcal{D}; \leq, A)$-ban.

Köszönöm a figyelmet!