Felbontható-e…?

Kunos Ádám

Ebben a dolgozatban olyan feladatokat közlünk, amelyeknek közös jellemzője, hogy szövegükben szerepel a dolgozat címe. További hasonlóság a feladatok között, hogy mindegyik (kivéve az utolsót) azt vizsgálja, hogy a természetes számok egy adott részhalmaza felbontható-e valamilyen megadott feltétel alapján. A 1.-10. feladatok végtelen elemszámú, míg a 11.-15. feladatok véges elemszámú halmazok felbontásával foglalkoznak. A feladatokhoz helyenként több megoldást is közlünk, habár a közölt megoldások közül néha kiválasztható egy „legszebb”, mégis a többi megoldás is bizonyos szempontból tanulságos.
Külön köszönettel tartozom Pósa Lajos tanár úrnak, akitől számos feladat (4.,5.,6.,8., és a 15. feladat alapja), és néhány feladathoz tartozó megoldás ötlete származik.

1. feladat. Felbontható-e a pozitív egész számok halmaza két diszjunkt A és B részhalmazra úgy, hogy létezzenek olyan $a,b>1$, $(a,b)=1$ természetes számok, melyekre igaz ,hogy A mindegyik elemét a-val, B mindegyik elemét b-vel szorozva ugyanahhoz a halmazhoz jutunk?
(XVI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. osztály 6. feladata nyomán)

Megoldás. Kezdjük az elején az elemek elhelyezését a két halmazban. Vegyük észre, hogy már az 1 „problémás”. Szimmetriai okok miatt feltehető, hogy az 1 az A halmazba kerül. Ekkor a B halmazban lévő elemek b-szeresei között szerepel $1\cdot a=a$, azaz $b|a$, de ez lehetetlen hiszen $(a,b)=1$ és $b>1$. Tehát a felbontás nem lehetséges

Ebben a megoldásban csak az 1 „problémásságát” használtuk ki, és jól látható ,hogy más $k\in N^+\backslash\{1\}$ számra nem is vihető át teljes egészében ez a gondolamenet, így feltehetjük a kérdést: Mi történne, ha az egyet kizárnánk? Erre a kérdésre keresi a választ a 2. feladat.

2. feladat. Felbontható-e az egynél nagyobb természetes számok halmaza két diszjunkt A és B részhalmazra úgy, hogy létezzenek olyan $a,b>1$, $(a,b)=1$ természetes számok, melyekre igaz ,hogy A mindegyik elemét a-val, B mindegyik elemét b-vel szorozva ugyanahhoz a halmazhoz jutunk?
(XVI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. osztály 6. feladata nyomán)

Megoldás. Végtelen sok prímszám lévén, létezik olyan, amely sem a-nak sem b-nek nem osztója. Tekintve egy ilyet p prímet észrevehetjük, hogy ez hasonlóan „problémás” mint az első feladatban az egy. Feltehetjük ugyanis, hogy ez a p prím az A halmazban van ekkor $b\,|\,p\cdot a$, hiszen B halmaz elemeinek b-szeresei között szerepel $p\cdot a$. Ez viszont lehetetlen, hiszen $(b,p)=(a,b)=1$. Tehát ezen módosítással sem lehetséges a felbontás

Megjegyzés. Az eddigiekhez hasonlóan könnyen belátható, hogy véges sok elemet kizárva a pozitív egészek közül a kapott számhalmaz az 1. és 2. feladat feltételeinek megfelelően nem bontható fel.

Térjünk most vissza az 1. feladathoz. Ebben a feltételek túl szigorúak voltak a felbontás megvalósításához. Próbáljunk a feladat feltételein enyhíteni: hagyjuk el az $(a,b)=1$ feltételt. Így születik a 3. feladat.

3. feladat. Felbontható-e a pozitív egész számok halmaza két diszjunkt A és B részhalmazra úgy, hogy létezzenek olyan $a,b>1$, természetes számok, melyekre igaz ,hogy A mindegyik elemét a-val, B mindegyik elemét b-vel szorozva ugyanahhoz a halmazhoz jutunk?

(XVI. Nemzetközi Magyar Matematikaverseny, 10. osztály 6. feladata nyomán)

Megoldás. Ilyen enyhébb feltételek mellett az előző bizonyítási módszereink csődöt mondanak, ami is nem csoda, hiszen ezekkel a módosított feltételekkel találhatunk megfelelő felbontást. Legyen A azon pozitív egészek halmaza, melyek prímtényezős felbontásában a 2 páros kitevőn szerepel, B pedig azoké, melyekben nem. Jól látható, hogy ezen $A;B$ felbontás mellett $a=4$, $b=2$ megfelelőek. Tehát ilyen, gyengébb feltételek mellett már elvégezhető a felbontás.

4. feladat. Felbontható-e a természetes számok halmaza két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik se tartalmazzon (egész kezdőelemű és differenciájú) számtani sorozatot?

Megoldás. Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy a felbontás nem lehetséges nem járunk sikerrel, hiszen a válasz igen, létezik megfelelő felbontás. Kezdjük az elemeket elhelyezni $A;B$ halmazokba, vegyük sorra a természetes számokat. A 0 kerüljön A-ba, az 1;2 B-be, 3;4;5 az A-ba, 6;7;8;9 a B-be, és így tovább felváltva halmazról halmazra mindig eggyel több elem kerüljön a következő halmazba. Be kell még látnunk, hogy ez a felbontás megfelel a feladat feltételeinek.
Tegyük fel indirekt módon, hogy az egyik halmazban szerepel egy végtelen d differenciájú számtani sorozat. Ebből következik, hogy található olyan K egész szám (a sorozat első eleme megfelelő K-nak) melyre igaz, hogy ebben a halmazban minden K-nál nagyobb számokból álló d darab egymás után következő szám között szerepel (pontosan) egy a számtani sorozatban, így ebben a halmazban is. De ez ennél a felbontásnál egyik halmazra sem teljesül, hiszen tetszőlegesen nagy L pozitív egészhez létezik mindkét hamazban (K-nál nagyobb első tagú) L-nél több egymást követő egész szám, és a másik halmazban ekkor L-nél több egymás után következő egész nem szerepel. Ellentmondásra jutottunk, oka a hibás feltevés, így ez a felbontás valóban megfelelő. Létezik tehát a feladat feltételeinek eleget tevő felbontás.

Próbáljuk szigorítani a 4. feladat feltételeit, hogy szellemes konstrukció helyett a lehetetlenség bizonyítása legyen a megoldás. Próbálkozhatunk azzal, hogy a végtelen számtani sorozat helyett már végestől is megkívánjuk, hogy ne legyen egyik halmazban se. Egy ilyen feladatot tűzünk ki a következőnek.

5. feladat Felbontható-e a természetes számok halmaza két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik se tartalmazzon (egész kezdőelemű és differenciájú) háromtagú számtani sorozatot?

Megoldás. Az új feltétel nagyon szigorúnak tűnik, érezhetjük, hogy így már nem végezhető el a felbontás.
Először egy segédtételt igazolunk: Ha létezik a feladat feltételeinek megfelelő felbontás, akkor egyik halmazban sincs olyan $1<n$ természetes szám, hogy $n+2$ is eleme a halmaznak. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik ilyen n az egyik (A) halmazban. Ekkor $n+1;n-2;n+4$ nem elemei A halmaznak, különben rendre $n,n+1,n+2$ vagy $n-2,n,n+2$ vagy $n,n+2,n+4$ háromtagú számtani sorozatok benne lennének az A halmazban. Így $n+1,n-2,n+4$ nem elemei A halmaznak, tehát B halmaznak elemei, és ezek háromtagú számtani sorozatot alkotnak. Ellenmondásra jutottunk, oka a hibás feltevés, így igaz a segédtétel.
Tegyük most fel indirekt módon, hogy feladat által megkívánt felbontás elvégezhető két $A;B$ halmazra. Szimmetriai okok miatt feltehetjük ,hogy $2 \in A$. Ekkor a segédtétel alapján $4 \in B$,

és így tovább $6 \in A$, $8 \in B$ végül $10 \in A$. Ekkor A halmazban 2;6;10 szerepel, ez 3 tagú számtani sorozat így ellentmondásra jutottunk, mely oka a hibás feltevés azaz, nem végezhető el a feladat feltételeinek megfelelően a felbontás.

Megjegyzés. Az 5. feladat szoros kapcsolatban áll az ún. Van der Waerden tétellel. Van der Waerden tétele a kombinatorikus számelmélet és általában a kombinatorika egyik fontos tétele.
A tétel szerint, ha k,r egynél nagyobb természetes számok, akkor van olyan $W(k,r)$ természetes szám, hogy a következő állítás igaz: akárhogyan osztjuk k részre az $\{1,2,...,W(k,r)\}$ halmazt, valamelyik rész tartalmaz r tagú számtani sorozatot.
Ezt az eredményt Bartel Leendert van der Waerden 1927-ben igazolta.
Jól látható, hogy az 5. feladat k=2 , r=3 speciális esete ennek a tételnek. [1.]

6. feladat. Felbontható-e a pozitív egész számok halmaza két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik se tartalmazzon (egész kezdőelemű és kvóciensű) mértani sorozatot?

Első megoldás. A felbontás elvégezhető. Következőképpen végezzük a felbontást.

A	0!		2!+1 , 2!+2 , …,3!	…	$(2n)!+1,(2n)!+2,…,(2n+1)!$		…
B		1!+1				$(2n+1)!+1,…,(2n+2)!$	

Be kell látnunk még, hogy ez a felbontás megfelelő. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, azaz, hogy ezen felbontás esetén az egyik halmazban van (legalább) egy mértani sorozat. Legyen ennek a mértani sorozatnak kvóciense q. Ekkor nyilvánvaló, hogy létezik olyan K pozitív egész szám (a sorozat első eleme megfelel K-nak) melyre igaz, hogy bármely $K<n$ egész esetén $n+1,n+2,...,qn$ számok között szerepel (pontosan) egy a mértani sorozatban, így a halmazban is. Ez viszont jól láthatóan nem teljesül a konstrukcióban hiszen bármilyen nagy q-hoz található olyan $q;K<k$ természetes szám (B halmaz esetén páros, A esetén páratlan) melyre $k!+1,k!+2,...,(k+1)!$ számok közül egyik se eleme a halmaznak pedig, mint mondtuk már $k!+1,k!+2,...,q(k!)(<(k+1)!)$ számok között kellene lennie elemének a sorozatnak. Ellentmondására jutottunk, oka a hibás feltevés, így ezen felbontás valóban megfelel a feladat feltételeinek.

Ennek a konstrukciónak az alapgondolata nagyon hasonló volt a 4. feladat megoldásában szereplőéhez, de nem használta ki közvetlenül azt. Most mutatunk egy olyan megoldást, ami közvetlenül kihasználja a 4. feladat megoldásában szerepelt konstrukciót.

Második megoldás. Minden pozitív egészhez rendeljünk egy pozitív egész számot. Az 1-hez az 1-et rendeljük, az összes többi pozitív egészhez pedig a prímtényezős felbontásában szereplő prímszámok hatványkitevőinek összegét. (Így pl. a 2-höz 1-et, 6-hoz 2-t, 16-hoz 4-et, 24-hez 4-t.) Ezek után úgy rendezzük A és B halmazba az elemeket, hogy ha az imént a számhoz rendelt érték a 4. feladat megoldásában az ottani A hamazban volt, az A halmazba kerül a szám egyébként pedig a B-be. (Ez jól láthatóan teljesen más felbontást eredményez mint, amilyen az első megoldásban volt.) Megmutatjuk, hogy ez a felbontás is megfelelő.
Indirekt úton bizonyítunk, tegyük fel az ellenkezőjét, azaz hogy A vagy B halmazban van mértani sorozat. A hozzárendelési szabály alapján nyilvánvaló, hogy egy mértani sorozat elemeihez rendelt számok számtani sorozatot alkotnak, tehát A vagy B elemeihez rendelt számok halmazában kell lennie végtelen számtani sorozatnak, de mivel a 4. feladat megoldásának helyes konstrukciója alapján osztottuk két részre a számokat, e két halmaz egyikében sincs végtelen számtani sorozat. Ellentmondásra jutottuk melynek oka a hibás feltevés, tehát ez a konstrukció is megfelelő.

A 4.,5.,6. feladat után a legtermészetesebben ebbe a feladatsorba illő feladat a következő.

7. feladat Felbontható-e a pozitív egész számok halmaza két diszjunkt részhalmazra úgy, hogy egyik se tartalmazzon (egész kezdőelemű és kvóciensű) három tagú mértani sorozatot?

Ennek a feladatnak a részletes megoldásával nem foglalkozunk e dolgozatban, mert a 3.,4.,5. feladat után nem tartalmazna semmi újdonságot. A felbonthatóság lehetetlenségének bizonyítását az 5. feladat megoldásához hasonlóan elvégezhetjük.

8. feladat. Felbontható-e a természetes számok halmaza két végtelen elemszámú diszjunkt A,B részhalmazra, úgy, hogy mindkét halmazra igaz legyen, hogy bármely 7 különböző elemének az összege is eleme a halmaznak, ha igen hányféleképpen végezhető el a felbontás?

Első megoldás. Könnyen adódik egy megfelelő konstrukció, a páros-páratlan számokra való felbontás, hiszen páratlan darab páratlan szám összege páratlan, páros számok összege pedig páros. Vajon van-e másik megfelelő felbontás? A másik felbontás keresésére irányuló kísérleteink kudarcba fulladnak, hiszen nincs másik megfelelő konstrukció.
Indirekt úton igazoljuk ezt az állítást. Tegyük fel, hogy létezik a páros páratlan felbontáson kívül másik felbontás, és tekintsük ezt. Mivel nem a páros páratlan felbontás szerint bontottuk fel a természetes számok halmazát, az egyik halmazban nyilvánvalóan van olyan y egész, hogy (y+2) a másik halmazban van, szimmetriai okok miatt feltehetjük, hogy y A-ban (ekkor (y+2) B-ben van). Mivel A,B végtelen elemszámú halmazok nyilvánvalóan végtelen sok olyan különböző a_i (i=1,2…) lesz az A halmazban, hogy (a_i+1) a B halmazban van, hiszen ha nem így lenne egy adott számnál nagyobb természetes számok mind az egyik halmazban lennének, tehát a másik halmaz véges elemszámú lenne. Ez az állítás ugyanígy igaz a B halmazra b_i, (b_i+1) számokkal mivel A és B szerepe szimmetrikus. Tekintsük tehát A halmazban a különböző a_1,a_2 számokat úgy hogy (a_1+1),(a_2+1) a B-ben vannak és tekintsük a B halmazban a különböző b_1,b_2,b_3,b_4 számokat úgy hogy (b_1+1),(b_2+1),(b_3+1),(b_4+1) az A halmazban vannak. Ekkor az A-ban és B-ben is kijelöltünk 7-7 elemet ezeknek az összege A-ban, B-ben rendre

$$S_A=a_1+a_2+(b_1+1)+(b_2+1)+(b_3+1)+(b_4+1)+y,\ S_B=(a_1+1)+(a_2+1)+b_1+b_2+b_3+b_4+(y+2).$$

Jól láthatóan S_A=S_B így ennek a számnak mindkét halmazban benne kell lennie, ez ellentmondás így az indirekt feltevés hibás, azaz nincs a páros-páratlan számokra való felbontáson kívül más felbontás.

Második megoldás. Ismét indirekt úton bizonyítjuk, hogy a páros-páratlan számokra való felbontáson kívül nincs másik megfelelő konstrukció. Tegyük fel, hogy létezik a páros páratlan felbontáson kívül másik felbontás és tekintsük ezt. Nyilvánvalóan ekkor a két halmaz közül az egyikben lesz két szomszédos természetes szám. Ezekhez hozzáválasztva 5-5 azonos számot ebből a halmazból kapunk 6-6 számot melyek összege két szomszédos természetes szám legyen x,x+1. Tekintsünk még az eddig említett számoktól különböző tetszőleges y elemet. Ekkor van 6-6 számunk melyek összege x,x+1 és egy y számunk. Hozzáválasztva az x összegű számhatoshoz az y-t az x+y összeg is benne van a halmazban, hisz ez 7 szám összege. De ekkor mivel ez is eleme a halmaznak, ezt is hozzzáválasztva x-hez (x+y)+x=2x+y is benne van a halmazban, ehhez is x-et választva (2x+y)+x=3x+y is benne van, és így tovább kx+y is benne van ahol $k \geq 1$ természetes szám. Tehát:
x+y,2x+y,3x+y,… Benne van a halmazban.
Most y-hoz (x+1)-es összegű számhatos választva y+x+1 is bennevan a halmazban és ehhez az előző módszerrel x összegű számhatost választgatva nyerjük, hogy:
x+y+1,2x+y+1,3x+y+1,… is benne van a halmazban.

x+y+1-hez (x+1)-eket választgatva nyerjük hogy:
$x+y+1, 2x+y+2, 3x+y+3, \ldots, ((x-1)\cdot x+y+x-1)$ is benne van a halmazban. Ezekhez mind x-eket választgatva a már bemutatott módon nyerjük, hogy:
0.sorozat: $x+y, 2x+y, 3x+y, 4x+y, 5x+y, \ldots$
1. sorozat: $x+y+1, 2x+y+1, 3x+y+1, 4x+y+1, 5x+y+1, \ldots$
2. sorozat: $2x+y+2, 3x+y+2, 4x+y+2, 5x+y+2, \ldots$
3. sorozat: $3x+y+3, 4x+y+3, 5x+y+3, \ldots$
4. sorozat: $4x+y+4, 5x+y+4, \ldots$
…
(x-1).sorozat: $(x-1)\cdot x+y+x-1, x\cdot x+y+x-1, (x+1)\cdot x+y+x-1\ldots$
Ezek az elemek mind benne vannak a halmazban így minden $((x-1)\cdot x+y+x-1)$-nál nagyobb természetes szám ebben a halmazban van, ha $zx+y+k$, $0\le k\le(x-1)$ $(k,z\in N)$ alakú akkor megtalálhatjuk a k. sorozatban (minden természetes szám felírható ilyen alakban a maradékos osztás tétele alapján). Ez ellentmondás, hiszen ekkor a másik halmaz véges elemszámú (egy adott számnál nem tartalmaz nagyobb elemet), az ellentmondás oka a hibás feltevés. Tehát ismét igazoltuk az állítást, valóban csak a páros-páratlan felbontás megfelelő.

Megjegyzés. A 8. feladat könnyen általánosítható. A feladat szövegében 7 helyére tetszőleges 1-nél nagyobb páratlan egész számot írva hasonlóan igaz, hogy csak a páros-páratan felbontás megfelelő, 7 helyére 0-nál nagyobb páros számot írva nincs megfelelő felbontás. Ezeknek az igazolása mindkét közölt megoldáshoz teljesen hasonlóan megtörténhet.

A 8. feladathoz nagyon hasonló problémát kapunk, ha a részhalmazok elemeinek összegéről nem azt kívánjuk meg, hogy benne legyenek ugyanabban a halmazban, hanem hogy ne legyenek benne. Fogalmazzuk meg pontosan a feladatot.

9. feladat. Felbontható-e a pozitív egész számok halmaza két diszjunkt A,B részhalmazra úgy, hogy mindkét halmazra igaz legyen, hogy bármely n (n adott, egynél nagyobb egész) különböző elemének az összege nem eleme a halmaznak, ha igen hányféleképpen végezhető el ez a felbontás?

A felbontás ebben a feladatban semmilyen n esetén sem végezhető el. Ezt a 8. feladat 1. megoldásához teljesen hasonlóan igazolhatjuk, a bizonyítás részletes kidolgozását az olvasóra bízzuk.

Következőnek a 8.,9. feladatokhoz hasonló feladatot tűzünk ki, összeg helyett szorzattal.

10. feladat. Felbontható-e az egynél nagyobb egész számok halmaza két diszjunkt A;B részhalmazra, úgy, hogy mindkét halmazra igaz legyen, hogy bármely 2 különböző elemének szorzata nem eleme a halmaznak, és ha igen hányféleképpen végezhető el a felbontás?

Megoldás. A 9. feladat megoldása szerint ugyanebben a feladatban szorzat helyett összeget írva, a felbontás nem végezhető el. Próbáljuk erre visszavezetni a feladatot. Tekintsük az egynél nagyobb természetes számok $\{2^1, 2^2, 2^3 \ldots\}$ részhalmazát. Jól láthatóan ezt a részhalmazt is fel kell bontanunk a feladat feltételeinek megfelelően , ha az egynél nagyobb természetes számok halmazát fel akarjuk bontani. A hatványozás ismert azonosságainak felhasználásával jól látható, hogy ennek a halmaznak a felbontása a szorzat feltételnek megfelelően, azt kívánja, hogy a kitevők hamazát, az {1,2,3…} halmazt bontsuk fel két diszjunk részhalmazra, úgy hogy mindkettőben két különböző elem összege ne legyen eleme a halmaznak, ez pedig a 9. feladat megoldása alapján lehetetlen. A felbontás tehát nem végezhető el.

Eddigi feladataink végtelen elemszámú halmazok felbontásával foglalkoztak. Most áttérünk a véges elemszámú halmazok felbontásával kapcsolatos kérdésekre.

11. feladat. Felbontható-e a H={1,2…,2007} halmaz két diszjunkt A,B részhalmazra, úgy hogy a két halmaz közül a nagyobb elemszámúnak ne legyen két olyan nem feltétlenül különböző a,b eleme, melyre $a+b$ kettőhatvány?

Megoldás. A felbontás nem végezhető el, ezt fogjuk igazolni. Először is tisztázzuk, hogy a H halmaz, mivel 2007 (páratlan) elemszámú, ha két diszjunkt részhalmazra bontjuk az egyik mindig nagyobb elemszámú lesz, legalább [2007/2]+1=1004 elemű. Elég tehát azt igazolnunk, hogy a H halmaznak egy legalább 1004 elemű részhaza tartalmaz olyan nem feltétlenül különböző a,b elemet melyre $a+b$ kettőhatvány. Bontsuk fel a H halmazt a következő diszjunkt halmazokra.

(1) $\{41,2007\},\{42,2006\},\{43,2005\},\ldots,\{1023,1025\}$
(2) $\{24,40\},\{25,39\},\ldots,\{31,33\}$
(3) $\{9,23\},\{10,22\},\ldots,\{15,17\}$
(4) $\{1,7\}\{2,6\},\{3,5\}$
(5) $\{1024\},\{32\},\{16\},\{8\},\{4\}$

Könnyen ellenőrizhető, hogy mind a 2007 számot besoroltuk 1005 páronként diszjunkt halmazba. Ahhoz, a feltételeknek megfelelő részhalmazt jelöljünk ki, viszont mind az 1005 halmazból el kell hagyni legalább 1 elemet, hiszen (1)-(4) sorokban az elempárok úgy vannak válogatva, hogy összegük kettőhatvány, (5) sorban pedig kettőhatványok szerepelnek melyek, ha benne lennének a halmazban akkor a-nak és b-nek is ugyanazt a kettőhatványt választva az $a+b$ nyilvánvalóan kettőhatvány lenne. Legalább 1005 elemet elhagyva viszont a kapott halmaz legfeljebb 2007-1005=1002 elemű lehet, így a H halmaznak egy legalább 1004 elemű részhaza tartalmaz olyan nem feltétlenül különböző a,b elemet melyre $a+b$ kettőhatvány. Igazoltuk tehát az állításunkat, a felbontás valóban nem végezhető el.

12. feladat. Felbontható-e az $\{1^2,2^2,...,n^2\}$ $(1<n\in Z^+)$ halmaz két diszjunkt halmazra úgy, hogy a két halmazban lévő elemek összege megegyezzen? Ha nem, mely n-ekre végezhető el a felbontás?

(KöMaL F.2777. nyomán)

Megoldás. A felbontás már a legkisebb lehetséges n esetén, n=2-re sem végezhető el. Hiszen {1,4} nyilvánvalóan nem bontható fel a feltételeknek megfelelően. Tehát minden n esetén biztosan nem végezhető el a felbontás. Kis próbálkozással könnyen látható, hogy n=3,4 esetben sem végezhető el a felbontás. A felbonthatóság szükséges feltétele, hogy $1^2+2^2+...+n^2$ összeg páros legyen (,hiszen ennek az összegnek két azonos egész szám összegének kell lennie), és mivel az összegben a páros és páratlan tagok felváltva követik egymást,jól láthatóan n=4k+1 vagy n=4k+2 ($k\in Z^+$) esetben az összeg páratlan, így ebben az esetben nem végezhető el a felbontás.

Eddig megvizsgáltuk tehát n=2,3,4,5,6,9,10,13,14,17,18,… eseteket. A kimaradó n-ekre rátérve n=7,8 esetben a következő felbontásokra bukkanhatunk.

$$1^2+2^2+4^2+7^2=3^2+5^2+6^2\ ,\ 1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2$$

Az n=8-ra vonatkozó felbontás különösen ígéretesnek tűnik, mert a két halmazban egyenlő számú elem van és jól megfigyelve a felírt egyenlőséget, megfigyelhetjük, hogy a kitevőket elhagyva is igaz egyenlőséget kapunk, azaz 1+4+6+7=2+3+5+8. Ezen megfigyelésből a következő azonosságra következtethetünk.

$$(x+1)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+7)^2=(x+2)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+8)^2$$

Ez $x=y-1$ helyettesítéssel az

$$y^2+(y+3)^2+(y+5)^2+(y+6)^2=(y+1)^2+(y+2)^2+(y+4)^2+(y+7)^2$$

alakot ölti. Ez alapján már látható, hogy ha az első n négyzetszám halmaza felbontható a kívánt módon, akkor az első (n+8) is , hiszen 8 egymást követő egész szám megfelelően 2 csoportra bontható az azonosság alapján. Így tehát n=7,8-ra adott felbontásokkal az $n=8a$, $n=8a-1$ ($a\in N^+$) eseteket tisztáztuk. Már csak $n=8a+3$, $n=8a+4$ esetek maradtak tisztázatlanul, de a következő két (n=11,12 –re vonatkozó) konstrukcióval ezeket az eseteket is tisztázhatjuk.

$$1^2+3^2+4^2+5^2+9^2+11^2=2^2+6^2+7^2+8^2+10^2$$

$$1^2+3^2+7^2+8^2+9^2+11^2=2^2+4^2+5^2+6^2+10^2+12^2$$

Így tehát $n=8a-1$, $n=8a$, $n=8a+3$, $n=8a+4$ ($a\in N^+$) esetekben mindig felbontható a halmaz megfelelően, a többi esetben nem. Ezek szerint pontosan akkor létezik a feladat feltételeinek eleget tevő felbontás, ha $n=4b+3$ vagy $n=4b$ ($b\in N^+$) alakú.

13. feladat. Felbontható-e a H={1,2,…,2007} halmaz 13 részhalmazra úgy, hogy ezek közül alkalmasan választott 6 halmaz metszeteként $\{n\}$ előáll, bármely $n\in H$ -ra?

Megoldás. A 13 kellően szerencsétlen (vagy szerencsés) szám ahhoz, hogy a felbontás ne legyen elvégezhető.
Indirekt úton bizonyítjuk a felbontás lehetetlenségét. Tegyük fel, hogy létezik 13 megfelelő halmaz, ezek közül 6 halmaz metszetét $\binom{13}{6}$ féleképpen képezhetjük, és ezek között szerepelnie kell 2007 különböző (az első 2007 pozitív egész számot tartalmazó) egyelemű halmaznak, de ez lehetetlen, mivel $\binom{13}{6}$<2007. Ellentmondásra jutottunk, oka a hibás feltevés, így a felbontás valóban nem végezhető el.

A 13 túl kicsinek bizonyult $\left(\binom{13}{6}<2007\right)$, ezzel igazoltuk a felbonthatatlanságot. A 13-at elegendően nagy számra cserélve vajon elvégezhető-e a felbontás? Érdemes mindjárt a 14-gyel próbálkozni, hiszen 14 esetén már $\binom{14}{6}>2007$, így nem működik az előző bizonyítási módszerünk.

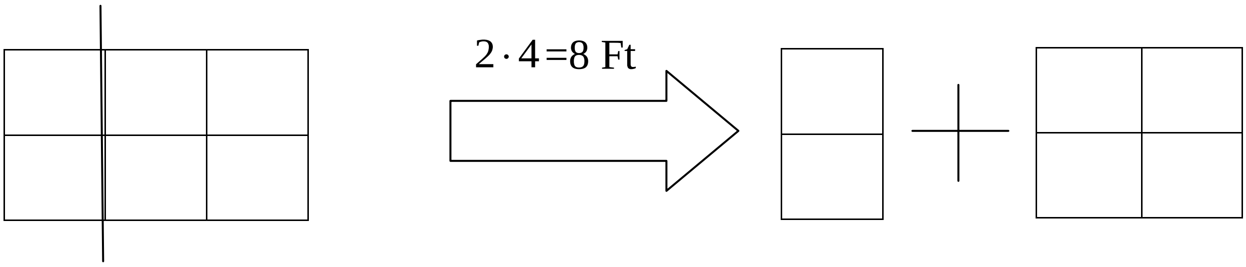
14. feladat. Felbontható-e a H={1,2,…,2007} halmaz 14 részhalmazra úgy, hogy ezek közül alkalmasan választott 6 halmaz metszeteként $\{n\}$ előáll, bármely $n\in H$ -ra?

Megoldás. Ebben az esetben már elvégezhető a felbontás. Úgy mutatjuk meg, hogy lehetséges a felbontás, hogy mutatunk egy módszert megfelelő $H_1,H_2,\ldots,H_{14}$ halmazok kialakítására. Legyenek $H_1,H_2,\ldots,H_{14}$ egyelőre üres halmazok. Legyenek $K_1,K_2,\ldots,K_{2007}$ halmazok a $\{H_1,H_2,\ldots,H_{14}\}$ halmaz különböző (tetszőlegesen) kiválasztott 6 elemű részhalmazai. (Ilyenből létezik 2007, hiszen $\binom{14}{6} > 2007$.) „Töltsük fel” elemekkel most a $H_1,H_2,\ldots,H_{14}$ halmazokat a következőképpen. Azokba a H_i (i=1,2,…,14) halmazokba tegyük a $k \in \{1,2,...,2007\}$ számot, melyekre $H_i \in K_k$. Az összes $k \in \{1,2,...,2007\}$ számot elhelyezve a feltételeknek megfelelően, az így kapott $H_1,H_2,\ldots,H_{14}$ halmazok megfelelő felbontást alkotnak, hiszen jól láthatóan $K_1,K_2,\ldots,K_{2007}$ halmazok elemeinek metszetei rendre {1},{2},…,{2007} halmazok (, mivel K_i elemeinek metszetében i nyilvánvalóan benne van (így helyeztük el), ha pedig más $i \neq j$ is lenne a metszetben, az $K_i \subseteq K_j$ -t jelentené ami a K halmazok megválasztásából adódóan lehetetlen).

Megjegyzés. A 13.,14. feladatot megfogalmazhatjuk egy sokkal általánosabb formában.
A H={1,2,…,n} halmaz akkor és csak akkor bontható fel k ($k \in N^+$) részhalmazra úgy, hogy {m} minden $m \in H$ -ra előáll alkalmasan választott l ($l \in N^+$) részhalmaz metszeteként, ha $\binom{k}{l} \geq n$.
Ezt a tételt a 13.,14. feladat megoldásával teljesen analóg módon igazolhatjuk.

A dolgozat utolsó „levezető” feladata legyen egy mese. Bizonyos szempontból a feladatnak van köze az eddigi halmazfelbontásokkal kapcsolatos feladatainkhoz.

15.feladat Egy jó humorú édességboltos tervet eszelt ki vásárlói meggondolkodtatására. Egy eredetileg 210 Ft-ért árult 3×7-es táblás csokoládét új feltételekkel árul. A vevő úgy veheti meg a csokoládét, ha $3 \cdot 7 = 21$ kis négyzetre tördeli a csokoládét a bejelölt törésvonalak mentén. Minden egyes csokoládérészlet kettétörésénél, a két újonnan keletkezett részben lévő négyzetek számának szorzatát kell fizetnie (, tehát egy $a+b$ kisnégyzetből álló csokoládét a,b kisnégyzetből álló részre törni $a \cdot b$ Ft-ba kerül). Felbontható-e a csokoládé kis négyzetekre a boltos új árazása mellett, úgy, hogy kevesebbet fizessünk, mint az eredeti ár.
(Az ábrán egy 2×3-as csoki kettétörését és árát látjuk példaképpen.)



Megoldás. Mesére mesével válaszolunk. 21 jó barát kincset keresni indul az erdőben. Együtt indulnak útnak, de hosszas bandukolás után ráébrednek, hogy kettéválva gyorsabban tudnak keresni, így kettéválnak két tetszőleges számú csoportra. Mielőtt tovább keresnének, a két csoport minden tagja egyszer kezet fog a másik csoport összes tagjával (,ekkor, ha k,l létszámú csoportokra váltak szét nyilvánvalóan $k \cdot l$ darab kézfogás zajlik le). A két csoport tovább folytatja kereső útját, de hamarosan a gyorsabb keresés érdekében újra kettéválik egy többtagú csoport, ismét a két csoport tagjai kezet fognak azokkal a jó barátaikkal akikkel nem együtt folytatják tovább a keresést. És így tovább a csoportok válnak szét, az emberek kezet ráznak, míg végül mindenki egyedül keresi a kincset, nincsenek már többtagú csoportok.
Mennyi kézfogás zajlott le összesen?
Jól látható, hogy matematikailag ugyanazt a kérdést fogalmazza meg mindkét feladat (ember csoportok $\rightarrow$ csokitöredékek , emberek $\rightarrow$ csokinégyzetek , kézfogások száma egy csoport kettéválásánál $\rightarrow$ fizetett összeg egy csokitörésnél , összes kézfogások száma $\rightarrow$ összesen

fizetett összeg). A különbség csak az, hogy a második történet kérdésére egyszerűen válaszolhatunk, hiszen minden ember mindegyik másiktól pontosan egyszer vált el, tehát pontosan egyszer fogott kezet így $21 \cdot 20/2=210$ kézfogás zajlott le összesen. Tehát akárhogyan tördeli a csokoládét a vevő, 210 Ft-ot fog fizetni továbbra is.

Felhasznált irodalom, hivatkozások:

[1] Wikipédia (2007) http://hu.wikipedia.org/wiki/Van_der_Waerden-t%C3%A9tel

Kunos Ádám

(Készült a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete által 2007-ben középiskolások számára kiírt pályázatra.)