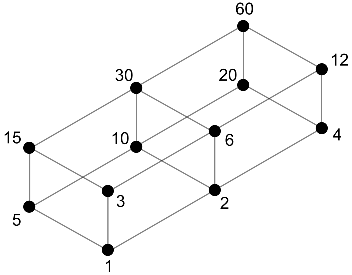
Elsőrendű definiálhatóság a véges irányított gráfok beágyazás-részbenrendezésében

Kunos Ádám

Témavezető: dr. Maróti Miklós
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

XXXI. OTDK, Budapest, 2013. április 19.

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?



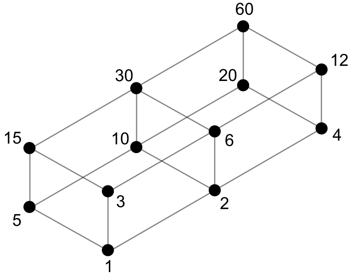
Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3, 5\}$ halmazok definiálhatóak.

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?

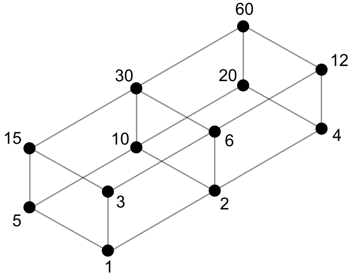


Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3, 5\}$ halmazok definiálhatóak.

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?



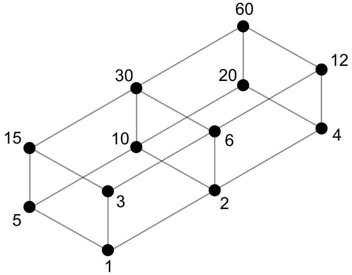
Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3, 5\}$ halmazok definiálhatóak.

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?



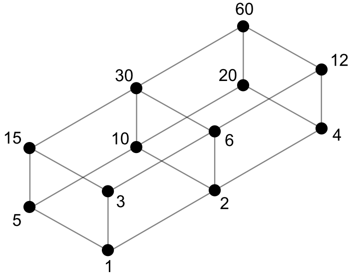
Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3, 5\}$ halmazok definiálhatóak.

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?



Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

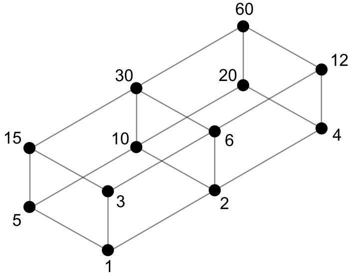
$\{2,3,5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3,5\}$ halmazok definiálhatóak.

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?

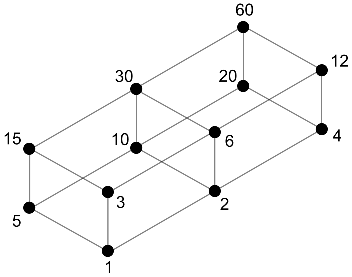
Sejtés: NEM. Bizonyítás?

Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:



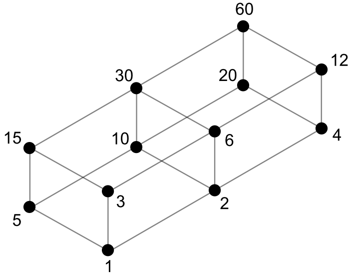
$1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?
Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:



$1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

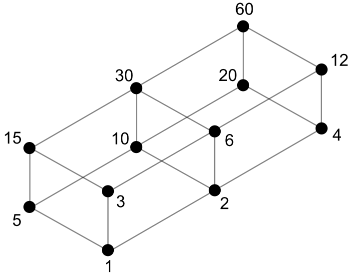
A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?
Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:



$1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?
Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:



$1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, I: finite semilattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 59-75.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, II: finite ordered sets.* Order **27**, 2010, 115-145.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, III: finite distributive lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 283-300.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, IV: finite lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 301-312.

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

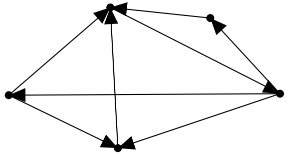
Példa:

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

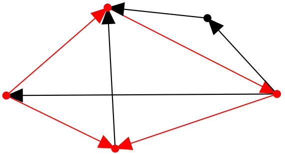


Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

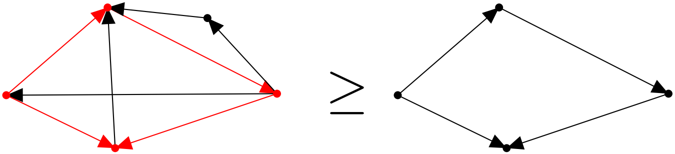


Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

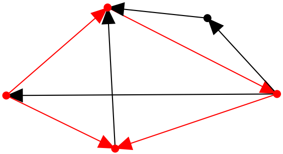


Irányított gráfok

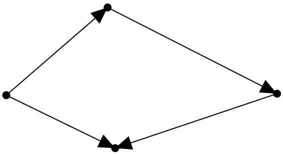
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



$\geq$



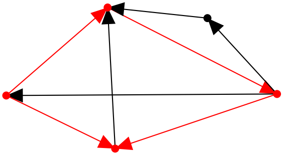
A $\leq$ reláció reflexív,

Irányított gráfok

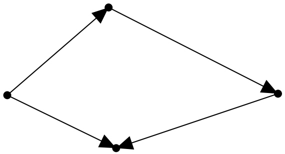
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \rightarrow G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u,v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



$$\geq$$



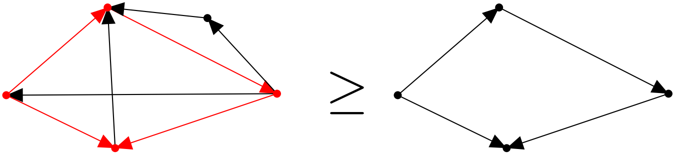
A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív,

Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



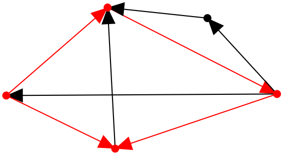
A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus,

Irányított gráfok

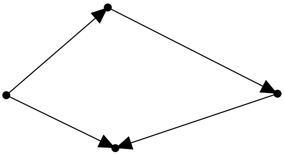
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

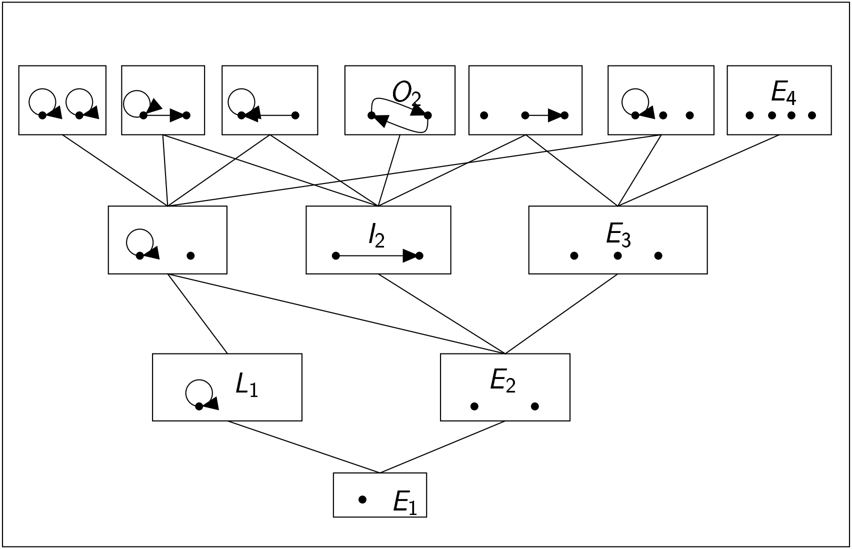


$\geq$



A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, tehát $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenredezett halmaz.

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenredezett halmaz „alja"



A dolgozat fő eredményei

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

1. Tétel.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

2. Tétel.

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt” adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

A dolgozat fő eredményei

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

1. Tétel.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

2. Tétel.

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt" adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

A dolgozat fő eredményei

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

1. Tétel.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

2. Tétel.

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt” adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

A dolgozat fő eredményei

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

1. Tétel.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

2. Tétel.

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt" adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

A dolgozat fő eredményei

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

1. Tétel.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

2. Tétel.

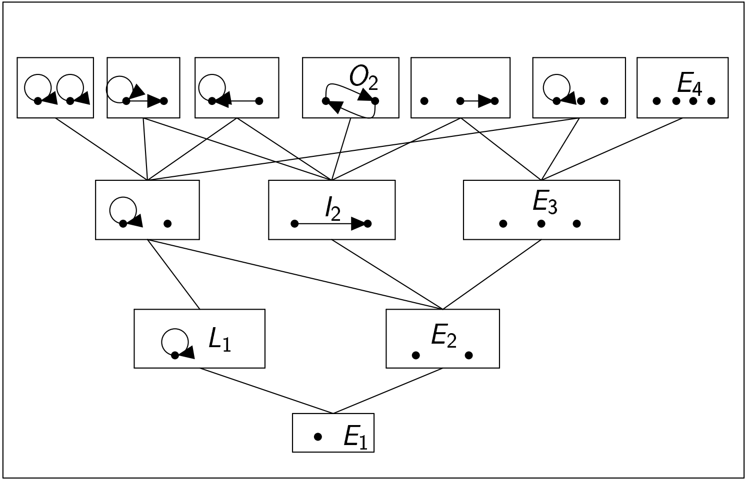
A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt” adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

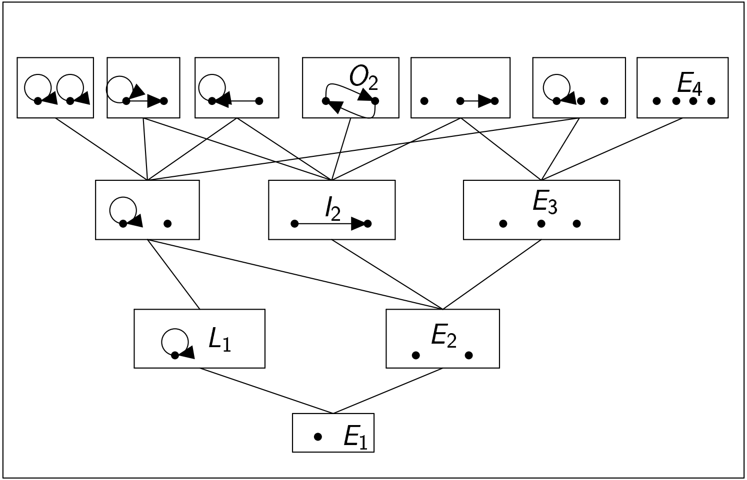
Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket.

Szinteket tudunk definiálni: $|V(G)| + |E(G)| = n$.

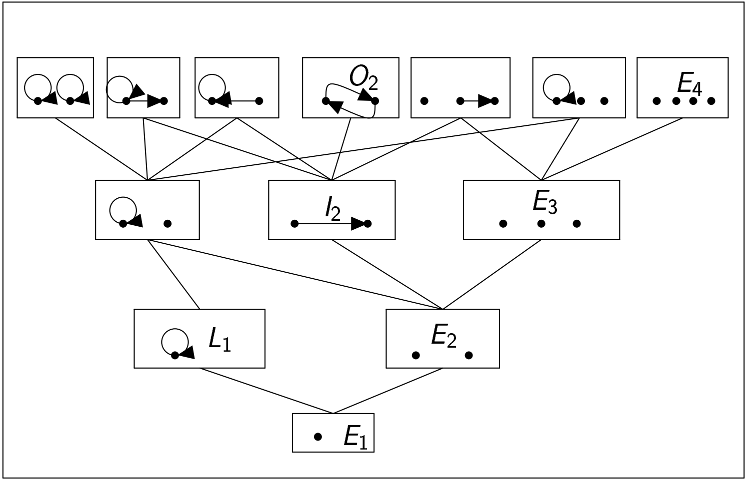


A bizonyítás: speciális gráfok, szintek

Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket.
Szinteket tudunk definiálni: $|V(G)| + |E(G)| = n$.



Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket.
Szinteket tudunk definiálni: $|V(G)| + |E(G)| = n$.



A bizonyítás: speciális gráfok

E_n: az n pontú üres gráf, L_n: az n csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

Lemma

Az E_n és L_n gráfok minden pozitív egész n esetén definiálhatóak.

Bizonyítás.

E_n: az egyetlen olyan X gráf, mely az n-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. L_n: a maximális olyan X gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. $\square$

O_n: n csúcsú kör, pl. O_5:

A bizonyítás: speciális gráfok

E_n: az n pontú üres gráf, L_n: az n csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

Lemma

Az E_n és L_n gráfok minden pozitív egész n esetén definiálhatóak.

Bizonyítás.

E_n: az egyetlen olyan X gráf, mely az n-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. L_n: a maximális olyan X gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. □

O_n: n csúcsú kör, pl. O_5:

E_n: az n pontú üres gráf, L_n: az n csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

Lemma

Az E_n és L_n gráfok minden pozitív egész n esetén definiálhatóak.

Bizonyítás.

E_n: az egyetlen olyan X gráf, mely az n-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. L_n: a maximális olyan X gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. □

O_n: n csúcsú kör, pl. O_5:

A bizonyítás: speciális gráfok

E_n: az n pontú üres gráf, L_n: az n csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

Lemma

Az E_n és L_n gráfok minden pozitív egész n esetén definiálhatóak.

Bizonyítás.

E_n: az egyetlen olyan X gráf, mely az n-edik szinten van, $L_1 \nleq X$ és $I_2 \nleq X$. L_n: a maximális olyan X gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \nleq X$ és $I_2 \nleq X$. □

O_n: n csúcsú kör, pl. O_5:

A bizonyítás: speciális gráfok

E_n: az n pontú üres gráf, L_n: az n csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

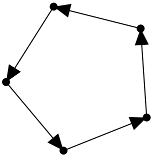
Lemma

Az E_n és L_n gráfok minden pozitív egész n esetén definiálhatóak.

Bizonyítás.

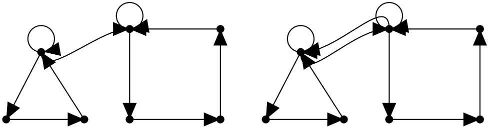
E_n: az egyetlen olyan X gráf, mely az n-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. L_n: a maximális olyan X gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. □

O_n: n csúcsú kör, pl. O_5:



A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:



$O_{3,4,L1}$ $\qquad$ $O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^+_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

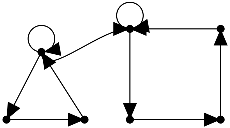
$\mathcal{O}^+_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^+_{i,j}$: $\{O_i \dot\cup O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

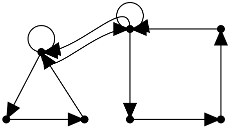
Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

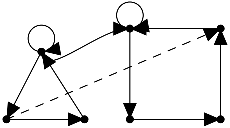


$O_{3,4,L1}$



$O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



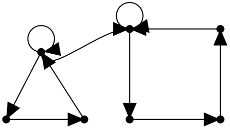
$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^{+}_{i,j}$: $\{O_i \dot\cup O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

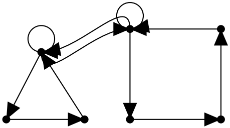
Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

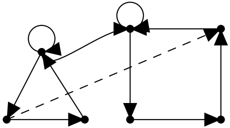


$O_{3,4,L1}$



$O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^+_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



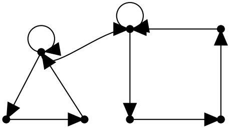
$\mathcal{O}^+_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^+_{i,j}$: $\{O_i \dot{\cup} O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

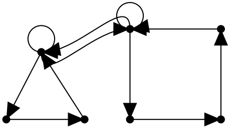
Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

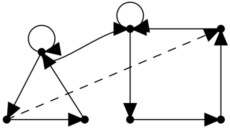


$O_{3,4,L1}$



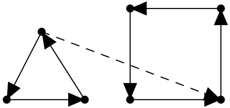
$O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

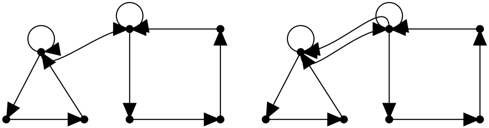
$\mathcal{O}^{+}_{i,j}$: $\{O_i \,\dot\cup\, O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

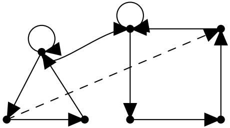
A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:



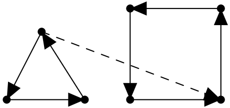
$O_{3,4,L1}$ $O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^+_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



$\mathcal{O}^+_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^+_{i,j}$: $\{O_i \mathbin{\dot\cup} O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

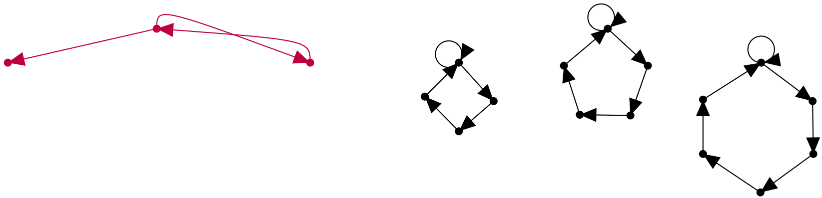
Amit definiálni akarunk.

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



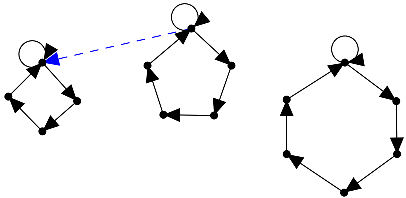
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát.

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



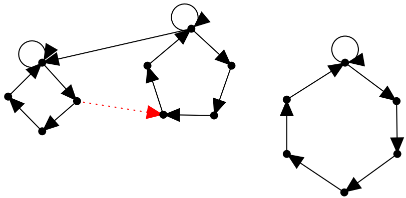
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$,

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



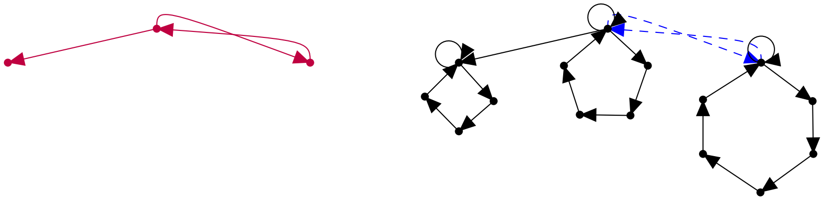
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$,
$\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \not\leq X$,

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



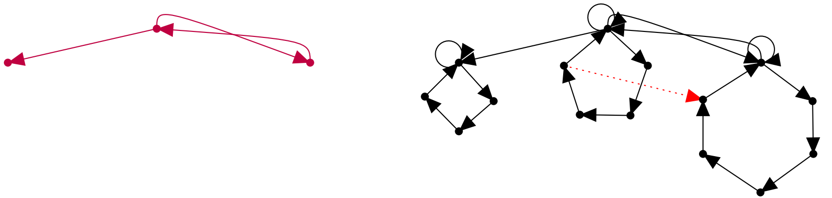
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \nleq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$,

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



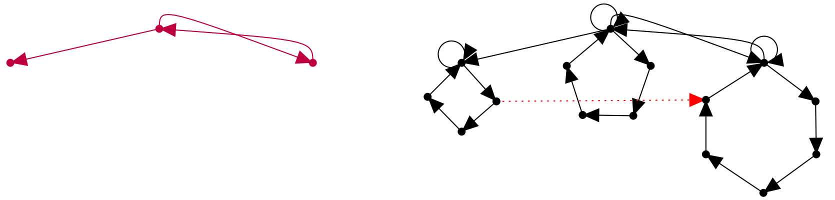
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$,

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



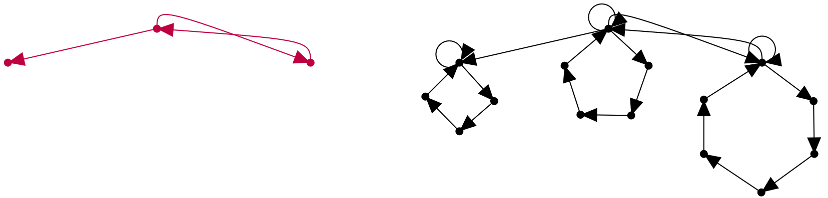
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \nleq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,6,L2} \nleq X$, $\mathcal{O}^{+}_{4,6} \nleq X$.

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



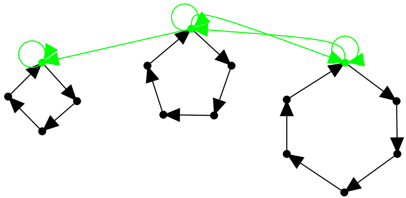
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



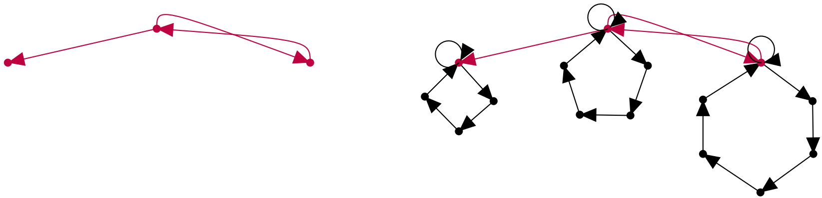
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.
A kiemelt gráf definiálható (a hurokélek miatt).

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



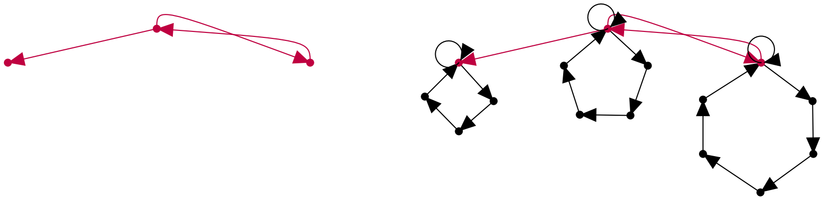
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{4,6} \not\leq X$.
Ebből már a kívánt gráf is definiálható.

A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

Lemma.

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf X. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \nleq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \nleq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \nleq X$.
Ebből már a kívánt gráf is definiálható. (Jóval bonyolultabb a helyzet!)

Bírálók kérdései

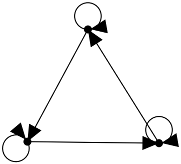
- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*

Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*

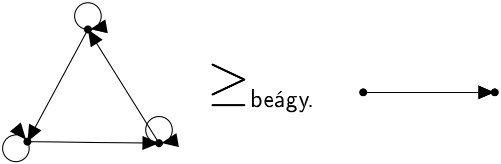
Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*



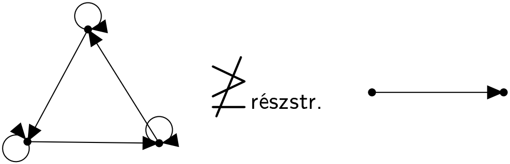
Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*



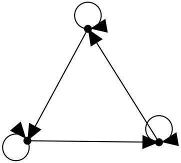
Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*

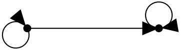


Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*



$\geq_{\text{részstr.}}$



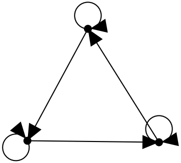
Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*

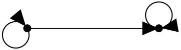
Sejtés: A részstruktúra részbenrendezésnek 4 automorfizmusa van,

Bírálók kérdései

- *Vannak-e más, korábbi munkák, amelyek filozófiája valamennyire analóg a jelen dolgozatéval?*
- *Mi az oka annak, hogy a beágyazhatóság által definiált részben rendezést tekinti, szemben a hivatkozott munkák által tekintett, a részstruktúrák által definiált rendezéssel?*



$\geq_{\text{részstr.}}$



Sejtés: A részstruktúra részbenrendezésnek 4 automorfizmusa van, az automorfizmuscsoportja a Klein-csoporttal izomorf.

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!