Függvények előállítása kompozícióként

Kunos Ádám

SZTE Bolyai Intézet,
"nem is olyan régen" Ságvári Gimnázium

Huhn András díjkiosztó, Ságvári Gimnázium
Szeged, 2017. november 22.

Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

Bemelegítés

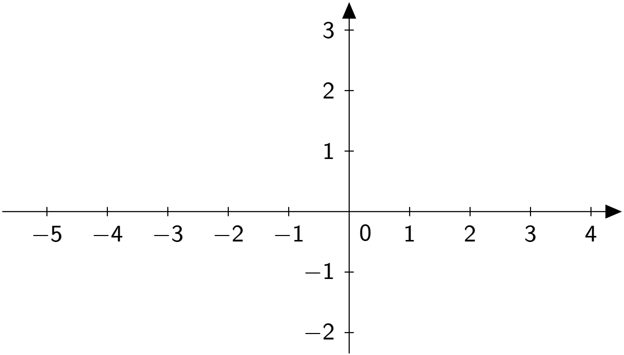
Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x - 1$, $f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x))))$

Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$

Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!
$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$
$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$
$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



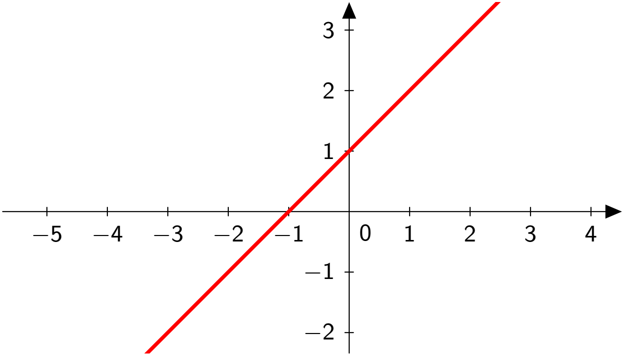
Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x + 1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



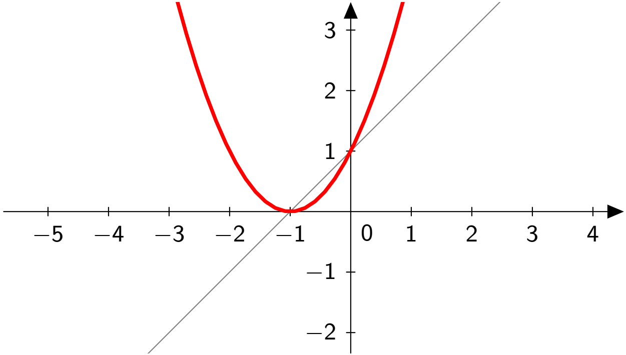
Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



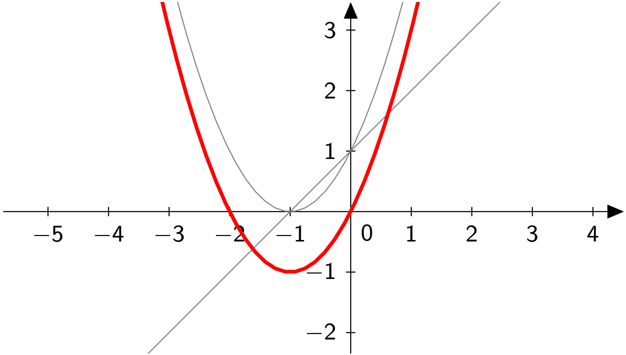
Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



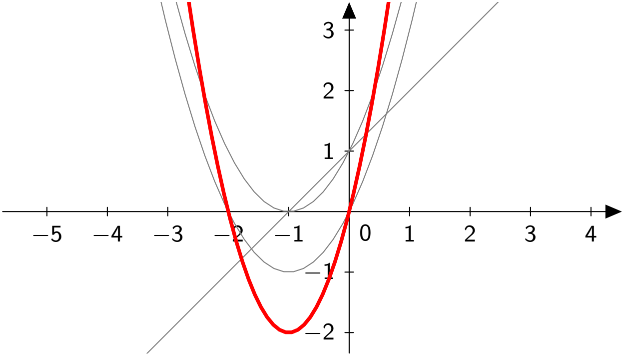
Bemelegítés

Ábrázoljuk az $f(x) = 2x^2 + 4x$ függvényt!

$f(x) = 2x^2 + 4x = 2((x+1)^2 - 1)$

$f_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x - 1,\ f_4(x) = 2x$

$f(x) = f_4(f_3(f_2(f_1(x)))) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x)$



Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, x^2, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, x^2, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, x^2, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, x^3, 2^x, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük.

Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, x^2, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, x^3, 2^x, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük. Mennyi a legkevesebb függvény, amivel megoldható a feladat?

Építkezés

Ha van néhány valós függvényünk, azokból kompozícióval újakat „építhetünk”.

Az előző dián felépítettük az $x^2 + 4x$ függvényt az $x + 1$, x^2, $x - 1$, $2x$ függvényekből.

Probléma

Adott néhány valós függvény, keressünk minél kevesebb olyan valós függvényt, amelyekből mindannyian előállíthatók kompozícióval.

Pl.: Találjunk minél kevesebb függvényt úgy, hogy a $\sin x$, x^3, 2^x, $|x|$, $[x]$, $\{x\}$ függvények kompozícióval elkészíthetőek legyenek belőlük. Mennyi a legkevesebb függvény, amivel megoldható a feladat?

Kérdezzünk még merészebbeket!

Építkezés – ígéret látatlanban

Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb k függvényt a 100 függvénytől függően választhatjuk.)

Építkezés – ígéret látatlanban

Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb k függvényt a 100 függvénytől függően választhatjuk.)

Probléma

n függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami n-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

Építkezés – ígéret látatlanban

Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk” kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k(<100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb k függvényt a 100 függvénytől függően választhatjuk.)

Probléma

n függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami n-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

Pl.: n függvény esetén meg tudjuk csinálni például $\approx \frac{2}{3}n$ függvénnyel?

Építkezés – ígéret látatlanban

Probléma

Tudjuk, hogy 100 valós függvényt kell majd „építenünk" kompozícióval, de nem tudjuk, hogy melyeket. Tudunk-e így – látatlanban – ígéretet tenni, hogy legfeljebb k($<$100) függvénnyel biztosan fel tudjuk majd építeni a később megkapott valós függvényeket? (A legfeljebb k függvényt a 100 függvénytől függően választhatjuk.)

Probléma

n függvényt kapunk az előző problémában vázolt módon, tudunk valami n-nél jobb nagyságrendű ígéretet adni?

Pl.: n függvény esetén meg tudjuk csinálni például $\approx \frac{2}{3}n$ függvénnyel? Még ügyesebben esetleg $\approx \log n$ függvénnyel? stb.

A történet kezdete számomra

Egy feladat Laczkovich Miklós és T. Sós Vera „Valós analízis" könyvéből

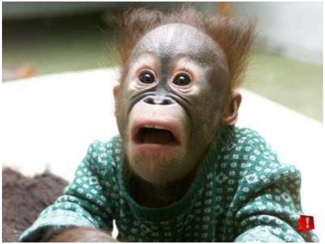
Legyenek $f_1, f_2, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvények. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan g_1, g_2, g_3 függvények, hogy bármely $i \in \{1, 2, ..., n\}$ esetén $f_i = g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \cdots \circ g_{i_k}$, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, 3\}$.

A történet kezdete számomra

Egy feladat Laczkovich Miklós és T. Sós Vera „Valós analízis" könyvéből

Legyenek $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ valós függvények. Igazoljuk, hogy ekkor léteznek olyan g_1, g_2, g_3 függvények, hogy bármely $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $f_i = g_{i_1} \circ g_{i_2} \circ \cdots \circ g_{i_k}$, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, 3\}$.

Reakcióm:



Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát.
Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez?

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI.

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát.
Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni?

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát.
Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát. Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

Tétel

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális.

Előkészületek

Egy kisgyerek az ablakon kinézve lovasokat és lovakat lát.
Megállapítja, hogy ugyanannyi ló van, mint lovas, pedig NEM TUD SZÁMOLNI. Hogyan csinálja?
Minden lovon pontosan egy lovas ül...

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális?
Miért nem triviális kérdés ez? Mert NEM TUDJUK ŐKET MEGSZÁMOLNI. Mit tudunk csinálni? Akkor mondjuk, hogy ugyanannyi van, ha létezik közöttük párosítás, ún. bijekció.

Tétel

Ugyanannyi egész szám van, mint racionális.

Tétel

Nem ugyanannyi valós szám van, mint racionális.

Előkészületek

Tétel

A valós számok egy olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazának, ami tartalmaz nyílt intervallumot, ugyanannyi eleme van, mint a valós számok halmazának, azaz létezik $H \to \mathbb{R}$ bijekció.

Előkészületek

Tétel

A valós számok egy olyan $H \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazának, ami tartalmaz nyílt intervallumot, ugyanannyi eleme van, mint a valós számok halmazának, azaz létezik $H \to \mathbb{R}$ bijekció.

Tétel

$\mathbb{R}^n$ elemszáma megegyezik $\mathbb{R}$ elemszámával tetszőleges $n > 0$ egész esetén.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1, 2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan g_3 kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint f_k az egész számegyenesen".

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan g_3 kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint f_k az egész számegyenesen".
Formálisan, g_3-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{k-1}$$

módon kell viselkednie.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \dots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan g_3 kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint f_k az egész számegyenesen".
Formálisan, g_3-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{k-1}$$

módon kell viselkednie. Ezeken az intervallumokon kívül mindegy, mit csinál g_3.

Saját megoldásom

Legyen g_1 egy $\mathbb{R} \to (1,2)$ bijekció.

Legyen $g_2(x) = x + 1$.

Ekkor $\underbrace{g_2 \circ g_2 \circ \ldots g_2}_{k-1 \text{ db}} \circ g_1 = g_2^{k-1} \circ g_1$ egy $\mathbb{R} \to (k, k+1)$ bijekció.

Már csak egy olyan g_3 kellene, ami a $(k, k+1)$ intervallumon „úgy viselkedik, mint f_k az egész számegyenesen".
Formálisan, g_3-nak a $(k, k+1)$ intervallumon

$$f_k \circ g_1^{-1} \circ (g_2^{-1})^{k-1}$$

módon kell viselkednie. Ezeken az intervallumokon kívül mindegy, mit csinál g_3. Készen vagyunk.

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények!

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük.

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen g egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció.

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen g egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \dots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \dots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen g egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 := g \circ g_2^* \circ g^{-1}$

Danka Tivadar megoldása

Szabaduljunk meg egy rövid időre attól a feltételtől, hogy g_1, g_1, g_3 valós függvények! Definiáljuk az alábbi függvényeket:

- $g_1^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$
- $g_2^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, 0)$
- $g_3^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1$

Ekkor látható, hogy

$$f_i = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*, \quad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

A függvényeket a következő módon valós függvényekké tehetjük. Legyen g egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bijekció. Definiáljuk a keresett függvényeket:

- $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1 := g \circ g_1^*$
- $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2 := g \circ g_2^* \circ g^{-1}$
- $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3 := g_3^* \circ g^{-1}$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1$$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
&g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
&\quad = (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*)
\end{aligned}
$$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned} g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\ &= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\ &= g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \end{aligned}$$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
&g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
&\quad = (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
&\quad = g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
&\quad = g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^*
\end{aligned}
$$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$
\begin{aligned}
g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1
&= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
&= g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
&= g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^* = f_i.
\end{aligned}
$$

Danka Tivadar megoldása

Ezzel a módszerrel világos, hogy minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén

$$\begin{aligned}
g_3 \circ \underbrace{g_2 \circ \cdots \circ g_2}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1 \\
&= (g_3^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ \cdots \circ (g \circ g_2^* \circ g^{-1}) \circ (g \circ g_1^*) \\
&= g_3^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_2^* \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ \cdots \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}} \circ g_1^* \\
&= g_3^* \circ \underbrace{g_2^* \circ \cdots \circ g_2^*}_{i-1 \text{ db}} \circ g_1^* = f_i.
\end{aligned}$$

Készen vagyunk.

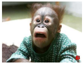
Készen vagyunk. Kérdés?

Készen vagyunk. Kérdés?

Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?

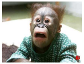
Készen vagyunk. Kérdés?

Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?

Igen. 

Készen vagyunk. Kérdés?

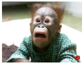
Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?

Igen. 

Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?

Készen vagyunk. Kérdés?

Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?

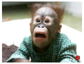
Igen. 

Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?

Nem.

Készen vagyunk. Kérdés?

Meg lehet csinálni a feladatot 2 függvénnyel?

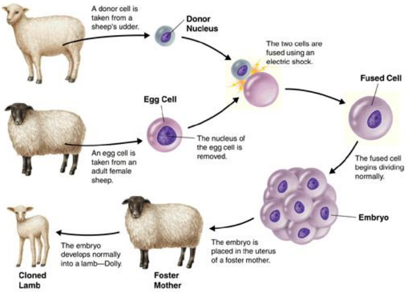
Igen. 

Meg lehet csinálni a feladatot 1 függvénnyel?

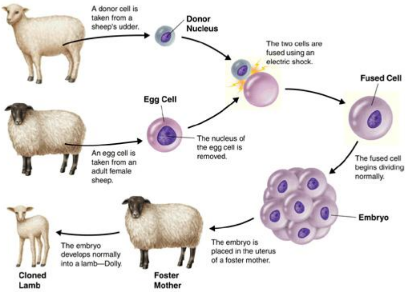
Nem. Két olyan f_1, f_2 valós függvényt kell keresni, melyekre $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$. Miért elég ennyi?

Normális emberek klónjai

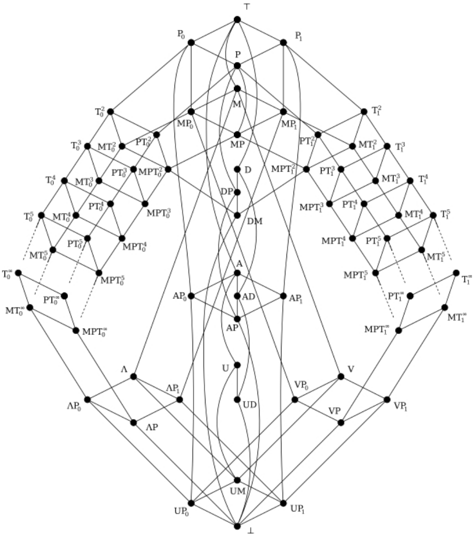
Normális emberek klónjai



Normális emberek klónjai



A mi klónjaink



A mi klónjaink

Klón

Egy nemüres halmazon értelmezett függvények úgy, hogy

- köztük van az összes projekció,
- kompozícióra zárt.

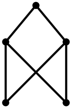
A mi klónjaink

Klón

Egy nemüres halmazon értelmezett függvények úgy, hogy

- köztük van az összes projekció,
- kompozícióra zárt.

Részbenrendezett halmaz



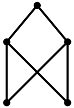
A mi klónjaink

Klón

Egy nemüres halmazon értelmezett függvények úgy, hogy

- köztük van az összes projekció,
- kompozícióra zárt.

Részbenrendezett halmaz



Monoton klónok

Részbenrendezett halmazokon (a pontok halmazán, mint alaphalmazon) értelmezett monoton függvények.

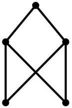
A mi klónjaink

Klón

Egy nemüres halmazon értelmezett függvények úgy, hogy

- köztük van az összes projekció,
- kompozícióra zárt.

Részbenrendezett halmaz



Monoton klónok

Részbenrendezett halmazokon (a pontok halmazán, mint alaphalmazon) értelmezett monoton függvények.

Kérdések, amikkel mostanában foglalkozom: monoton klónok végesen generáltak vagy nem?

Referencia

- Laczkovich M. és T. Sós V., *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006
- Danka T. és Kunos Á., *Valós függvények előállítása kompozícióként*, Polygon, XXII. köt., 1-2. sz., 2014. máj., 85-102.

Köszönöm a figyelmet!