# Elsőrendű definiálhatóság részstruktúra és beágyazás részbenrendezésekben

Kunos Ádám

Eötvös Loránd Kollégium—Matematika Műhely

Szeged, 2013. 11. 08.

A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program" című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

# Részbenrendezett halmazok

## Definíció

A $(P, \leq)$ struktúrát részbenrendezett halmaznak nevezzük, ha $\leq$ egy kétváltozos reláció $P$-n (azaz egy részhalmaza $P \times P$-nek) melyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- reflexív, vagyis $\forall x \in P : x \leq x$,
- antiszimmetrikus, vagyis $\forall x, y \in P : (x \leq y \ \text{ és } \ y \leq x) \ \Rightarrow \ x = y$,
- tranzitív, vagyis $\forall x, y, z \in P : (x \leq y \ \text{ és } \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

# Részbenrendezett halmazok

## Definíció

A $(P, \leq)$ struktúrát részbenrendezett halmaznak nevezzük, ha $\leq$ egy kétváltozos reláció $P$-n (azaz egy részhalmaza $P \times P$-nek) melyre teljesülnek a következő tulajdonságok:

- reflexív, vagyis $\forall x \in P : x \leq x$,
- antiszimmetrikus, vagyis $\forall x, y \in P : (x \leq y \text{ és } y \leq x) \Rightarrow x = y$,
- tranzitív, vagyis $\forall x, y, z \in P : (x \leq y \text{ és } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

## Definíció

A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmazban definiáljuk a $\prec$ ún. fedési relációt. Tetszőleges $x, y \in P$ elemek esetén $x \prec y$ akkor és csak akkor áll fenn, ha:

- $x \leq y$, $x \neq y$ és
- $x \leq z \leq y \Rightarrow (z = x \vee z = y)$

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$,

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$,

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$, $(D_n, |)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $D_n$ $n$ pozitív osztóinak halmazát jelöli,

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$, $(D_n, |)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $D_n$ $n$ pozitív osztóinak halmazát jelöli, tetszőleges nemüres $H \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazra $(H, |)$.

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$, $(D_n, |)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $D_n$ $n$ pozitív osztóinak halmazát jelöli, tetszőleges nemüres $H \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazra $(H, |)$.
- $(P(H), \subseteq)$ tetszőleges $H$ halmazra,

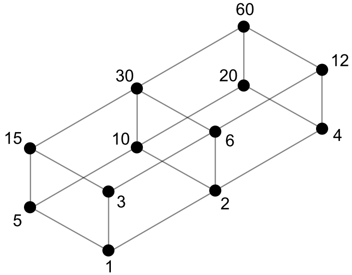
# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$, $(D_n, |)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $D_n$ $n$ pozitív osztóinak halmazát jelöli, tetszőleges nemüres $H \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazra $(H, |)$.
- $(P(H), \subseteq)$ tetszőleges $H$ halmazra, $(\mathcal{H}, \subseteq)$ halmazok tetszőleges $\mathcal{H}$ halmazára

# Példák, vizualizáció

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ ($\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmaza)
- $(\mathbb{N}, |)$, $(D_n, |)$ tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $D_n$ $n$ pozitív osztóinak halmazát jelöli, tetszőleges nemüres $H \subseteq \mathbb{N}$ részhalmazra $(H, |)$.
- $(P(H), \subseteq)$ tetszőleges $H$ halmazra, $(\mathcal{H}, \subseteq)$ halmazok tetszőleges $\mathcal{H}$ halmazára

A fedési reláció segítségével lerajzolhatunk (bizonyos) részbenrendezett halmazokat. Pl. $D_{60}$:



# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \dots$

# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \ldots$
- kvantorokkal,
  - $\forall, \exists$

# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \ldots$
- kvantorokkal,
  - $\forall, \exists$
- logikai jelekkel,
  - $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \ldots$
- kvantorokkal,
  - $\forall, \exists$
- logikai jelekkel,
  - $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- $\leq$-el

# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \dots$
- kvantorokkal,
  - $\forall, \exists$
- logikai jelekkel,
  - $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- $\leq$-el

felírható „szintaktikailag értelmes" logikai formulák. Pl.:
$(\forall y)(x \leq y)$, $(\exists x)(\forall y)((x \leq y) \Rightarrow (x \neq y))$.

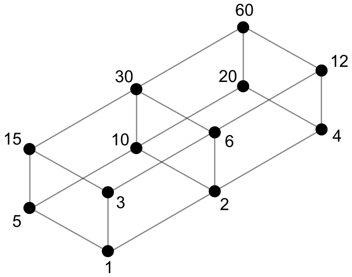
# Elsőrendű formulák a részbenrendezések nyelvén

- Változókkal,
  - $x, y, z, \ldots$
- kvantorokkal,
  - $\forall, \exists$
- logikai jelekkel,
  - $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- $\leq$-el

felírható „szintaktikailag értelmes” logikai formulák. Pl.:
$(\forall y)(x \leq y)$, $(\exists x)(\forall y)((x \leq y) \Rightarrow (x \neq y))$.

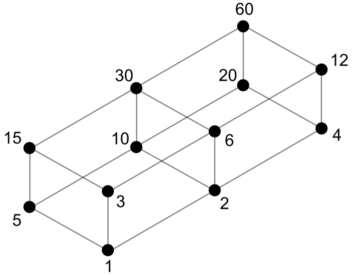
Szabad változó: nem tartozik kvantor hatáskörébe.
Kötött változó: kvantor hatáskörébe tartozik.

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?



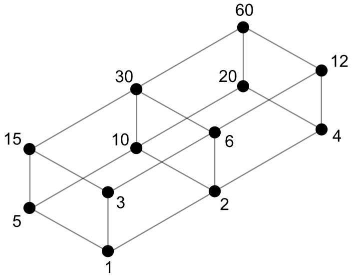
# Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?




Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

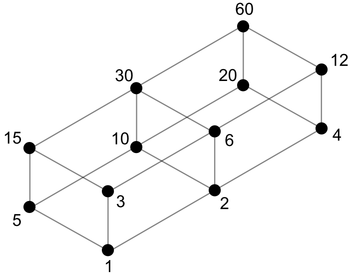
Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?




Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\}$

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?

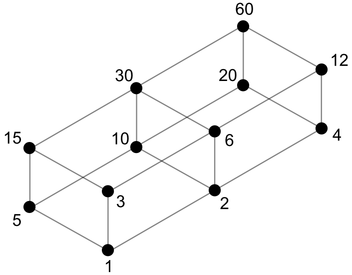



Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

$\{2, 3, 5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

# Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

Milyen részhalmazok definiálhatóak elsőrendű formulákkal ebben a részbenrendezett halmazban?

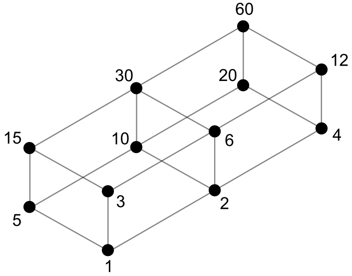



Például: $\{1\} = \{x : (\forall y)(x \leq y)\}$, $\{60\} = \{x : (\forall y)(y \leq x)\}$

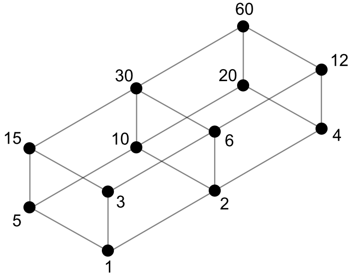
$\{2,3,5\} = \{x : \neg(x \in \{1\}) \wedge (\forall y)((y \leq x) \Rightarrow ((y = x) \vee (y \in \{1\})))\}$

A 2 megkülönböztethető a 3, 5-től, hiszen a 2-nek három rákövetkezője van, míg a 3-nak és 5-nek csak kettő, azaz a $\{2\}$ és a $\{3,5\}$ halmazok definiálhatóak.

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?



A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?



# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

**Definíció**

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

## Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

## Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,
- $\forall x, y \in P : x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

## Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,
- $\forall x, y \in P : x \leq y \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Az automorfizmusok gyakorlatilag „átcímkézések”.

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

## Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,
- $\forall x, y \in P : x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Az automorfizmusok gyakorlatilag „átcímkézések”.

Tetszőleges $p \in P$ esetén jelölje $\Psi_p$ azon egy szabad változót tartalmazó elsőrendű logikai formulák halmazát melyeket $p$ kielégít.

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

## Definíció

Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,
- $\forall x, y \in P : x \leq y \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Az automorfizmusok gyakorlatilag „átcímkézések”.

Tetszőleges $p \in P$ esetén jelölje $\Psi_p$ azon egy szabad változót tartalmazó elsőrendű logikai formulák halmazát melyeket $p$ kielégít. Figyeljük meg, hogy $P$ tetszőleges $\varphi$ automorfizmusa esetén $\Psi_p = \Psi_{\varphi(p)}$.

# Részbenrendezett halmazok automorfizmusai

**Definíció**

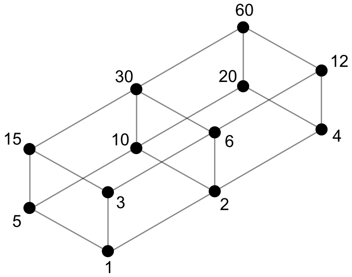
Azt mondjuk, hogy egy $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak a $\varphi : P \to P$ leképezés automorfizmusa, ha:

- bijektív,
- $\forall x, y \in P : x \leq y \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \leq \varphi(y)$.

Az automorfizmusok gyakorlatilag „átcímkézések”.

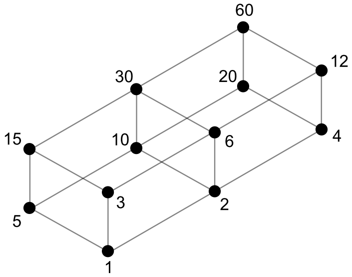
Tetszőleges $p \in P$ esetén jelölje $\Psi_p$ azon egy szabad változót tartalmazó elsőrendű logikai formulák halmazát melyeket $p$ kielégít. Figyeljük meg, hogy $P$ tetszőleges $\varphi$ automorfizmusa esetén $\Psi_p = \Psi_{\varphi(p)}$. Ez azt jelenti, hogy egy részbenrendezett halmazban automorfizmussal egymásba vihető elemek nem különböztethetőek meg elsőrendű formulákkal.

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?

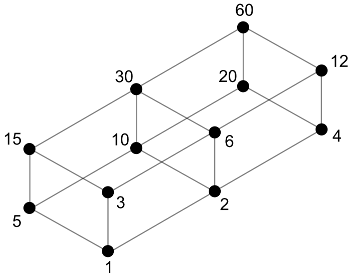


# Elsőrendű definiálhatóság részbenrendezett halmazokban

A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?
Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:



A 3 és az 5 elemek megkülönböztethetőek?
Sejtés: NEM. Bizonyítás?
Adjunk meg a részbenrendezett halmaznak olyan automorfizmusát, ami a 3-t az 5-be viszi:




$1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $4 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, $5 \mapsto 3$, $6 \mapsto 10$, $10 \mapsto 6$, $15 \mapsto 15$, $30 \mapsto 30$, $12 \mapsto 20$, $20 \mapsto 12$, $60 \mapsto 60$.

- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, I: finite semilattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 59–75.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, II: finite ordered sets.* Order **27**, 2010, 115–145.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, III: finite distributive lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 283–300.
- J. Ježek and R. McKenzie, *Definability in substructure orderings, IV: finite lattices.* Algebra Universalis **61**, 2009, 301–312.

# Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

# Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus,

# Irányított gráfok

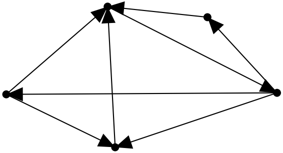
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

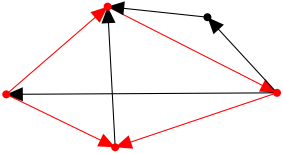
Példa:



$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

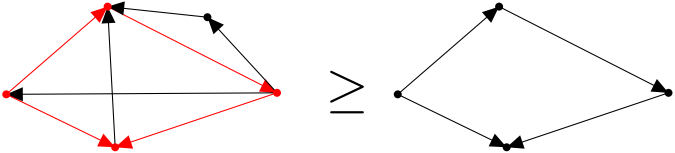


# Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u,v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:

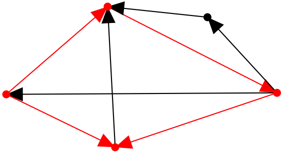


# Irányított gráfok

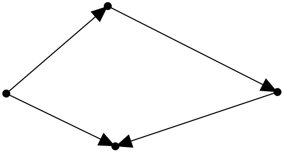
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



$\geq$



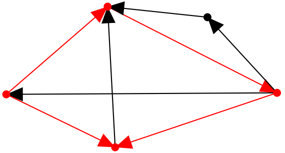
A $\leq$ reláció reflexív,

# Irányított gráfok

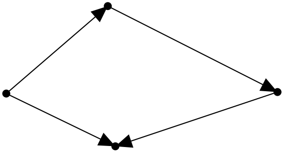
$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



$\geq$

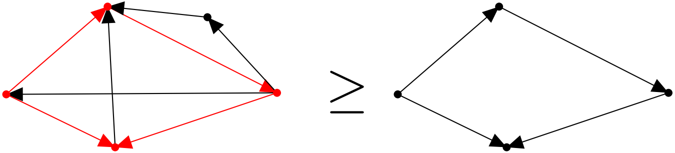


A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív,

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



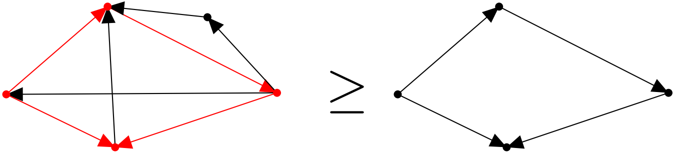
A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus,

# Irányított gráfok

$\mathcal{D}$: Véges irányított gráfok ($H \times H$ részhalmazai valamely $H$ nemüres halmazra) izomorfiatípusainak halmaza

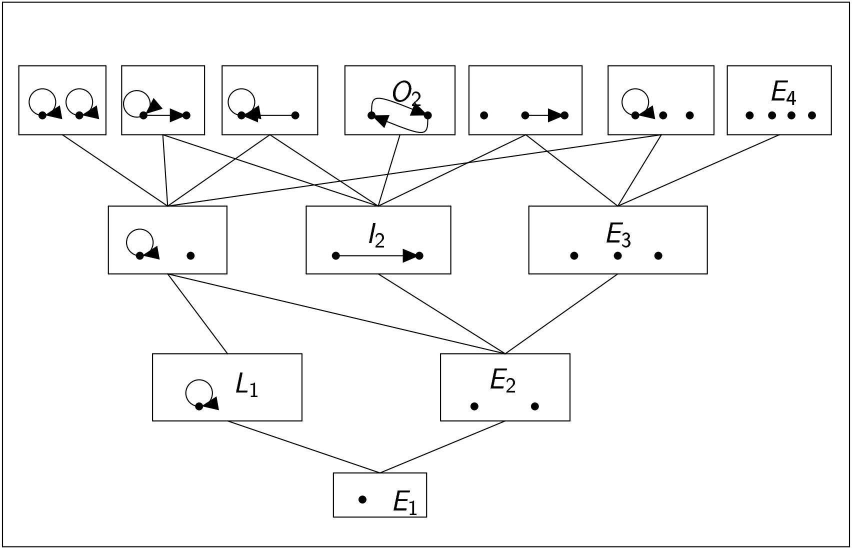
$G \leq G'$ akkor és csak akkor, ha létezik $\varphi : G \to G'$ injektív gráf homomorfizmus, azaz $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G')$.

Példa:



A $\leq$ reláció reflexív, tranzitív, antiszimmetrikus, tehát $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenredezett halmaz.

# A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenredezett halmaz „alja"



# Fő eredmények

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

# Fő eredmények

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

**Tétel**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

# Fő eredmények

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

**Tétel**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

# Fő eredmények

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

**Tétel**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt" adunk.

# Fő eredmények

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak nemtriviális automorfizmusa a $G \mapsto G^T$ leképezés.

## Tétel

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

## Tétel

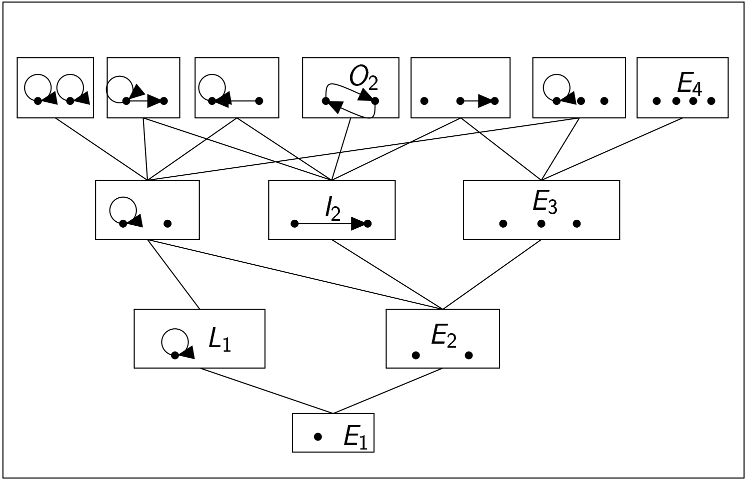
A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

1. Tétel bizonyítása. Csak egy kis „ízelítőt" adunk.

Speciális gráfokat tudunk definiálni.

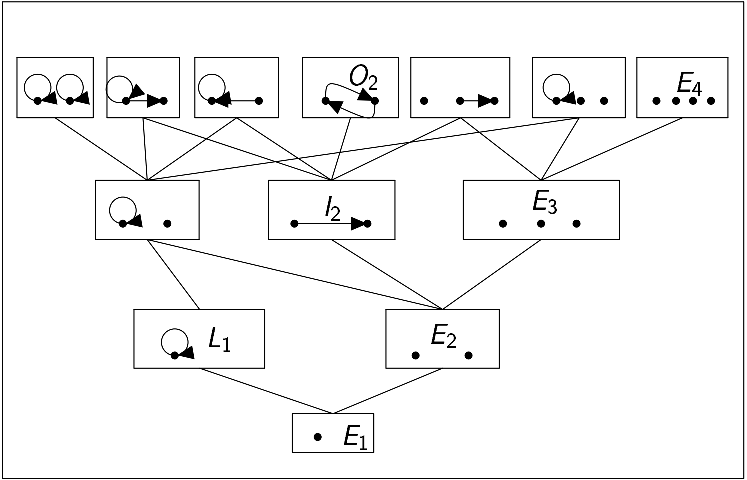
# A bizonyítás: speciális gráfok, szintek

Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket.



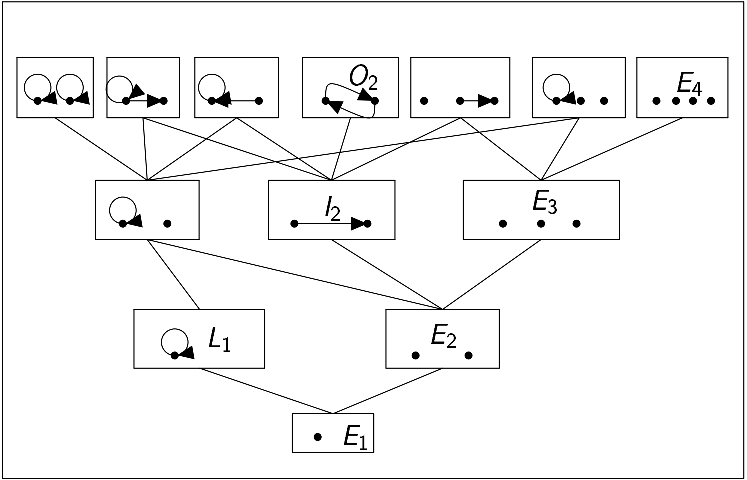
# A bizonyítás: speciális gráfok, szintek

Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket. Szinteket tudunk definiálni:



# A bizonyítás: speciális gráfok, szintek

Részbenrendezett halmazunk alján könnyen definiálhatunk elemeket. Szinteket tudunk definiálni: $|V(G)| + |E(G)| = n$.



# A bizonyítás: speciális gráfok

$E_n$: az $n$ pontú üres gráf, $L_n$: az $n$ csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

# A bizonyítás: speciális gráfok

$E_n$: az $n$ pontú üres gráf, $L_n$: az $n$ csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

**Lemma**

Az $E_n$ és $L_n$ gráfok minden pozitív egész $n$ esetén definiálhatóak.

# A bizonyítás: speciális gráfok

$E_n$: az $n$ pontú üres gráf, $L_n$: az $n$ csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

**Lemma**

Az $E_n$ és $L_n$ gráfok minden pozitív egész $n$ esetén definiálhatóak.

**Bizonyítás.**

$E_n$: az egyetlen olyan $X$ gráf, mely az $n$-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$.

# A bizonyítás: speciális gráfok

$E_n$: az $n$ pontú üres gráf, $L_n$: az $n$ csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

**Lemma**

Az $E_n$ és $L_n$ gráfok minden pozitív egész $n$ esetén definiálhatóak.

**Bizonyítás.**

$E_n$: az egyetlen olyan $X$ gráf, mely az $n$-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. $L_n$: a maximális olyan $X$ gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. □

# A bizonyítás: speciális gráfok

$E_n$: az $n$ pontú üres gráf, $L_n$: az $n$ csúcsú gráf, aminek minden csúcsán egy hurokél van és ezen kívül nincs több éle.

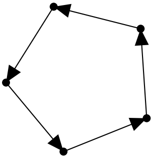
**Lemma**

Az $E_n$ és $L_n$ gráfok minden pozitív egész $n$ esetén definiálhatóak.

**Bizonyítás.**

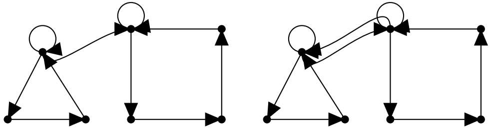
$E_n$: az egyetlen olyan $X$ gráf, mely az $n$-edik szinten van, $L_1 \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. $L_n$: a maximális olyan $X$ gráf, melyre $E_n \leq X$, $E_{n+1} \not\leq X$ és $I_2 \not\leq X$. □

$O_n$: $n$ csúcsú kör, pl. $O_5$:



# A bizonyítás: speciális gráfok

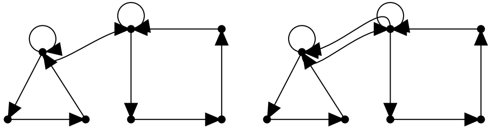
$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:



$O_{3,4,L1}$ $O_{3,4,L2}$

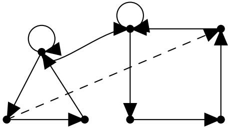
# A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:



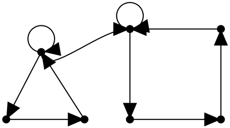
$O_{3,4,L1}$ $O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

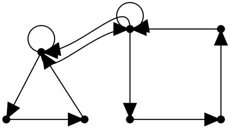


# A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

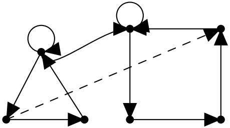


$O_{3,4,L1}$



$O_{3,4,L2}$

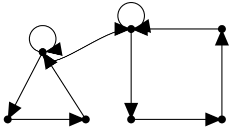
$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



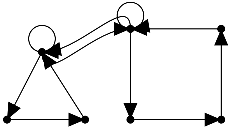
$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

# A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

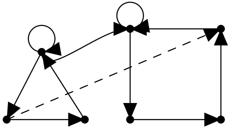


$O_{3,4,L1}$



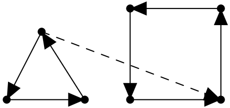
$O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



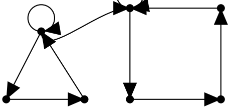
$\mathcal{O}^{+}_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^{+}_{i,j}$: $\{O_i \,\dot\cup\, O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$

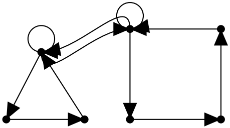


# A bizonyítás: speciális gráfok

$O_{i,j,L1}$, $O_{i,j,L2}$:

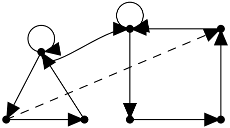


$O_{3,4,L1}$



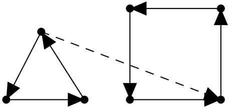
$O_{3,4,L2}$

$\mathcal{O}^+_{i,j,L1}$: $\{O_{i,j,L1}$-ből egy (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



$\mathcal{O}^+_{i,j,L2}$: teljesen hasonlóan $O_{i,j,L2}$-ből.

$\mathcal{O}^+_{i,j}$: $\{O_i \dot\cup O_j$ körökből egy tetszőleges (nem hurok)él behúzásával kapható gráfok$\}$



Tegyük fel, hogy ezek definiálhatóak! ((Ez sajnos nem igaz.))

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

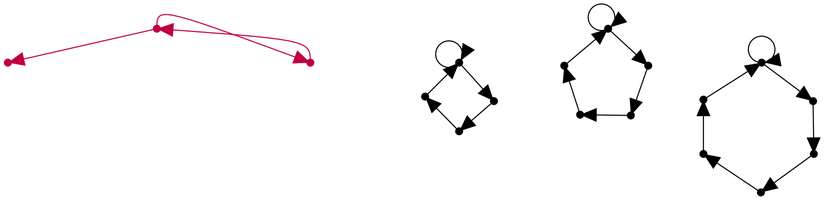
Amit definiálni akarunk.

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

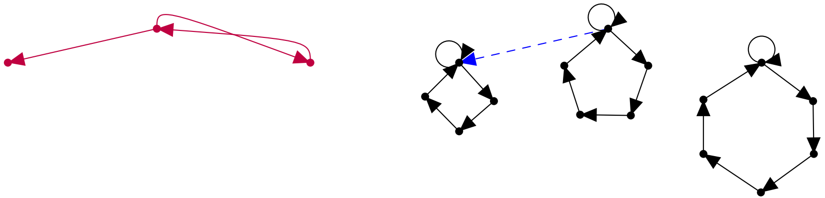


Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát.

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



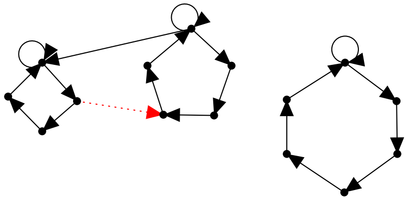
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$,

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

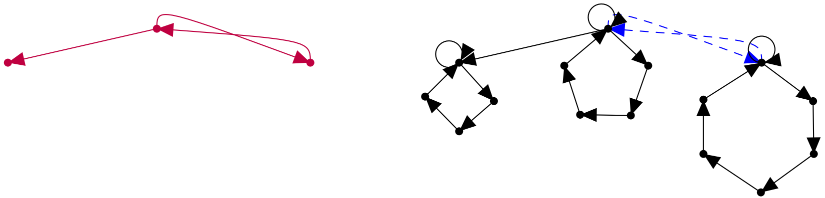


Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$,
$\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \not\leq X$,

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



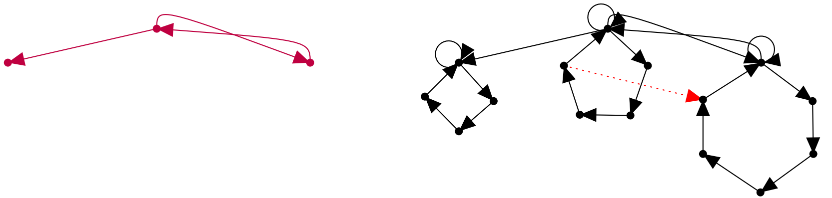
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \nleq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$,

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

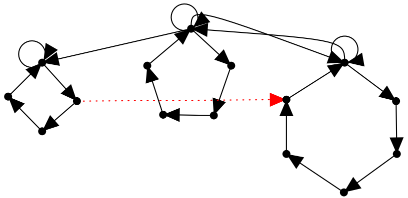


Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$,

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.

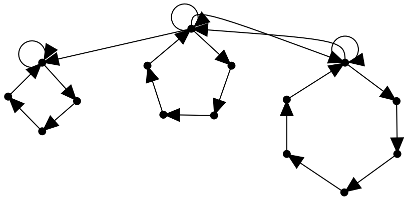


Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,4,L1} \nleq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^{+}_{5,6,L2} \nleq X$, $\mathcal{O}^{+}_{4,6} \nleq X$.

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



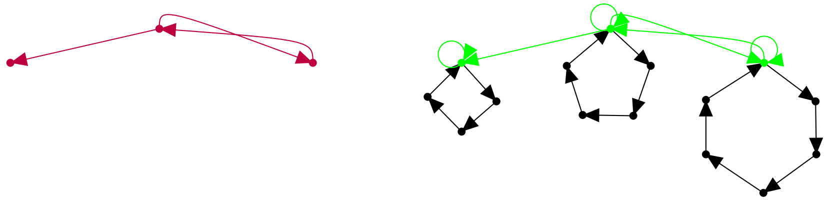
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

**Lemma**

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



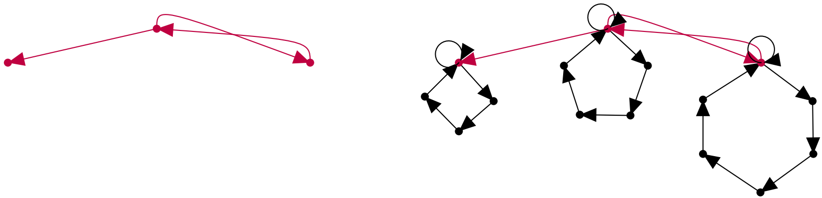
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.
A kiemelt gráf definiálható (a hurokélek miatt).

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

## Lemma

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



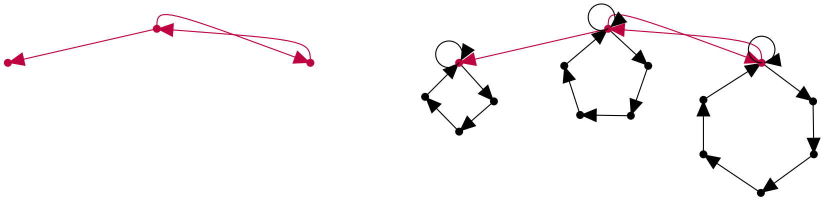
Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.
Ebből már a kívánt gráf is definiálható.

# A bizonyítás: hurokél mentes gyengén összefüggő gráfok

## Lemma

Tetszőleges $G \in \mathcal{D}$ gyengén összefüggő, hurokél mentes véges irányított gráfra $\{G, G^T\}$ definiálható.

A bizonyítás lényegét egy példán mutatjuk be.



Amit definiálni akarunk. Legyen a definiálandó gráf $X$. Tudunk definiálni egy – az ábrán látható – körökből álló struktúrát. $O_{5,4,L1} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,4,L1} \not\leq X$, $O_{5,6,L2} \leq X$, $\mathcal{O}^+_{5,6,L2} \not\leq X$, $\mathcal{O}^+_{4,6} \not\leq X$.
Ebből már a kívánt gráf is definiálható. (Jóval bonyolultabb a helyzet!)

## $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket. Ebből minden $\varphi$ automorfizmusra és $G \in \mathcal{D}$ irányított gráfra $\varphi(G) = G$ vagy $\varphi(G) = G^T$.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket. Ebből minden $\varphi$ automorfizmusra és $G \in \mathcal{D}$ irányított gráfra $\varphi(G) = G$ vagy $\varphi(G) = G^T$.
Következőt kellene belátnunk: ha létezik olyan transzponáltjával nem egyenlő $G \in \mathcal{D}$, melyre a $\varphi$ automorfizmus mellett $\varphi(G) = G$, akkor $\varphi$ az identitás. Rögzítsünk tehát egy ilyen $G$-t.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket. Ebből minden $\varphi$ automorfizmusra és $G \in \mathcal{D}$ irányított gráfra $\varphi(G) = G$ vagy $\varphi(G) = G^T$.
Következőt kellene belátnunk: ha létezik olyan transzponáltjával nem egyenlő $G \in \mathcal{D}$, melyre a $\varphi$ automorfizmus mellett $\varphi(G) = G$, akkor $\varphi$ az identitás. Rögzítsünk tehát egy ilyen $G$-t.
A fenti impilikációt definiálhatósági apparátussal szeretnénk bizonyítani.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket. Ebből minden $\varphi$ automorfizmusra és $G \in \mathcal{D}$ irányított gráfra $\varphi(G) = G$ vagy $\varphi(G) = G^T$.
Következőt kellene belátnunk: ha létezik olyan transzponáltjával nem egyenlő $G \in \mathcal{D}$, melyre a $\varphi$ automorfizmus mellett $\varphi(G) = G$, akkor $\varphi$ az identitás. Rögzítsünk tehát egy ilyen $G$-t.
A fenti impilikációt definiálhatósági apparátussal szeretnénk bizonyítani. Adjuk hozzá a részbenrendezések nyelvéhez a $G (\neq G^T)$ irányított gráfot, mint konstanst (paramétert).

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Tétel**

A $(\mathcal{D}, \leq)$ részbenrendezett halmaznak egyetlen nemtriviális automorfizmusa van, a $G \mapsto G^T$, tehát automorfizmuscsoportja $\mathbb{Z}_2$-vel izomorf.

*Bizonyítás.* Automorfizmusok csak definiálható halmazokon belül mozgathatnak elemeket. Ebből minden $\varphi$ automorfizmusra és $G \in \mathcal{D}$ irányított gráfra $\varphi(G) = G$ vagy $\varphi(G) = G^T$.
Következőt kellene belátnunk: ha létezik olyan transzponáltjával nem egyenlő $G \in \mathcal{D}$, melyre a $\varphi$ automorfizmus mellett $\varphi(G) = G$, akkor $\varphi$ az identitás. Rögzítsünk tehát egy ilyen $G$-t.
A fenti impilikációt definiálhatósági apparátussal szeretnénk bizonyítani. Adjuk hozzá a részbenrendezések nyelvéhez a $G(\neq G^T)$ irányított gráfot, mint konstanst (paramétert). Azt fogjuk belátni, hogy ekkor tetszőleges $F \in \mathcal{D}$ gráf definiálhatóvá válik, azaz létezik $\Phi_F(X)$ elsőrendű formula, melyet csak $F$ elégít ki.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk.

Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

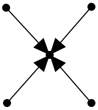
Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik. Elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $F \neq F^T$.

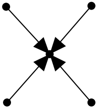
# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik. Elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $F \neq F^T$. Vezessük be az $A$ és az $X_n$ gráfokat.

$X_4$:  $A$: 

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

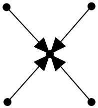
Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik. Elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $F \neq F^T$. Vezessük be az $A$ és az $X_n$ gráfokat.

$X_4$:  $A$: 

Először azt fogjuk megmutatni, hogy $A$ definiálhatóvá vált.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

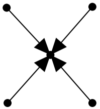
Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik. Elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $F \neq F^T$. Vezessük be az $A$ és az $X_n$ gráfokat.

$X_4$:  $A$: 

Először azt fogjuk megmutatni, hogy $A$ definiálhatóvá vált. Legyen $G$ csúcsainak száma $n$. Tekintsük a $G \,\dot\cup\, O_{n+1}$ gráfot.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

Könnyű meggondolni, hogy ha az áhított $\Phi_F(X)$ formulában minden $G$ helyett $\varphi(G)$-t írunk, akkor a $\varphi(F)$-t definiáló $\Phi_{\varphi(F)}(X)$ formulát kapjuk. Így viszont $\varphi(G) = G$ miatt $\Phi_F(X) = \Phi_{\varphi(F)}(X)$, amiből nyilván $F = \varphi(F)$. Így fogunk eljárni. Azt kell tehát megmutatnunk, hogy $G$ konstansként hozzáadása által minden $F \in \mathcal{D}$ irányított gráf definiálhatóvá válik. Elegendő arra az esetre szorítkoznunk, amikor $F \neq F^T$. Vezessük be az $A$ és az $X_n$ gráfokat.

$X_4$:  $A$: 

Először azt fogjuk megmutatni, hogy $A$ definiálhatóvá vált. Legyen $G$ csúcsainak száma $n$. Tekintsük a $G \,\dot\cup\, O_{n+1}$ gráfot. Ez definiálható, mint az egyetlen gráf a $\{G \,\dot\cup\, O_{n+1}, (G \,\dot\cup\, O_{n+1})^T = G^T \,\dot\cup\, O_{n+1}\}$ halmazból, melybe $G$ beágyazható.

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

**Lemma**

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \,\dot{\cup}\, O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

**Lemma**

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \,\dot\cup\, O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \,\dot\cup\, O_{n+1}) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n+1}\},$$

## Lemma

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \,\dot\cup\, O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \,\dot\cup\, O_{n+1}) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n+1}\},$$

és definiáljuk a $G'$ gráfot élek hozzáadásával $G$-ből:

$$E(G') = E(G \,\dot\cup\, O_{n+1}) \cup \{(v'_1, v), (v'_2, v), (v'_3, v), \ldots, (v'_{n+1}, v)\}.$$

**Lemma**

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \dot\cup O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \dot\cup O_{n+1}) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n+1}\},$$

és definiáljuk a $G'$ gráfot élek hozzáadásával $G$-ből:

$$E(G') = E(G \dot\cup O_{n+1}) \cup \{(v'_1, v), (v'_2, v), (v'_3, v), \ldots, (v'_{n+1}, v)\}.$$

$G'$ definiálható, mint az egyetlen elem a $\{G', (G')^T\}$ halmazból, amibe beágyazható $G \dot\cup O_{n+1}$.

**Lemma**

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \dot\cup O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \dot\cup O_{n+1}) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n+1}\},$$

és definiáljuk a $G'$ gráfot élek hozzáadásával $G$-ből:

$$E(G') = E(G \dot\cup O_{n+1}) \cup \{(v'_1, v), (v'_2, v), (v'_3, v), \dots, (v'_{n+1}, v)\}.$$

$G'$ definiálható, mint az egyetlen elem a $\{G', (G')^T\}$ halmazból, amibe beágyazható $G \dot\cup O_{n+1}$. Mostmár $X_{n+1}$ az egyetlen elem a $\{X_{n+1}, (X_{n+1})^T\}$ halmazból, ami beágyazható $G'$-be

## Lemma

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \,\dot\cup\, O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \,\dot\cup\, O_{n+1}) = V(G) \cup \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n+1}\},$$

és definiáljuk a $G'$ gráfot élek hozzáadásával $G$-ből:

$$E(G') = E(G \,\dot\cup\, O_{n+1}) \cup \{(v'_1, v), (v'_2, v), (v'_3, v), \dots, (v'_{n+1}, v)\}.$$

$G'$ definiálható, mint az egyetlen elem a $\{G', (G')^T\}$ halmazból, amibe beágyazható $G \,\dot\cup\, O_{n+1}$. Mostmár $X_{n+1}$ az egyetlen elem a $\{X_{n+1}, (X_{n+1})^T\}$ halmazból, ami beágyazható $G'$-be és végül $A$ az egyetlen elem a $\{A, A^T\}$ halmazból, ami $X_{n+1}$-be ágyazható. Bizonyítottuk $A$ definiálhatóságát,

# $(\mathcal{D}, \leq)$ automorfizmusairól

## Lemma

Minden $G$ véges irányított gráfra és $1 < n$ egészre $G^T \leq G \dot\cup O_n$ esetén $G = G^T$ teljesül.

Legyen $v \in V(G)$ és

$$V(G \dot\cup O_{n+1}) = V(G) \cup \{v_1', v_2', \ldots, v_{n+1}'\},$$

és definiáljuk a $G'$ gráfot élek hozzáadásával $G$-ből:

$$E(G') = E(G \dot\cup O_{n+1}) \cup \{(v_1', v), (v_2', v), (v_3', v), \ldots, (v_{n+1}', v)\}.$$

$G'$ definiálható, mint az egyetlen elem a $\{G', (G')^T\}$ halmazból, amibe beágyazható $G \dot\cup O_{n+1}$. Mostmár $X_{n+1}$ az egyetlen elem a $\{X_{n+1}, (X_{n+1})^T\}$ halmazból, ami beágyazható $G'$-be és végül $A$ az egyetlen elem a $\{A, A^T\}$ halmazból, ami $X_{n+1}$-be ágyazható. Bizonyítottuk $A$ definiálhatóságát, ugyanezt visszafele csinálva látható $F$ definiálhatósága, készen vagyunk.

Köszönöm a figyelmet!